

Механика. Курс лекций
Приложение к лекции №20. Стр.258. (с исправлениями)

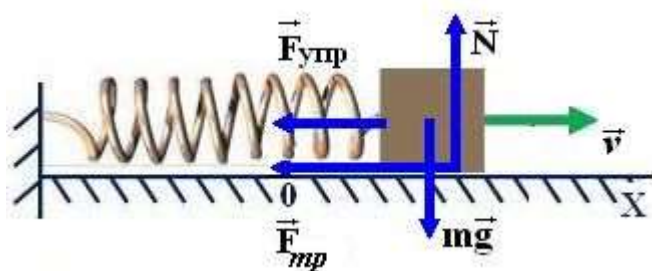


Рис.20.6.1

6. Колебания при сухом трении

Ранее рассматривались колебания при жидком или вязком трении, когда сила трения пропорциональна скорости. Для сухого (кулоновского¹) трения несмотря на постоянство по величине силы трения задача усложняется. Исходное уравнение

$$m\vec{a} = \vec{F}_{уп} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_{тр}$$

в проекциях на горизонтальную ось ОХ запишется как

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{уп\ x} + F_{тр\ x} = -kx - \text{sign}2(v_x, x) \mu mg, \quad (20.6.2.1)$$

или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = -\text{sign}2(v_x, x) \mu g,$$

где k – коэффициент упругости, μ – коэффициент трения. Здесь не делаем различий между коэффициентами трения скольжения и покоя.

Начальные условия, которые будут определять решение, имеют вид

$$x|_{t=0} = x_0, \quad \frac{dx}{dt}|_{t=0} = v_{0x}. \quad (20.6.2.3)$$

Знаковая функция здесь уже зависит от двух переменных и определяется сложнее, чем обычно

$$\text{sign}2(v_x, x) = \begin{cases} 1, & v_x > 0 \\ -1, & v_x < 0 \\ -1, & v_x = 0, x > 0 \\ 1, & v_x = 0, x < 0 \\ 0, & v_x = 0, x = 0 \end{cases}, \quad \text{sign}(v_x) = \begin{cases} 1, & v_x > 0 \\ 0, & v_x = 0 \\ -1, & v_x < 0 \end{cases}. \quad (20.6.3)$$

При сухом трении тело может находиться в состоянии покоя, даже если на него действует какая-либо сила, не превосходящая максимального значения силы трения покоя.

Явление остановки и задержки тела в отклонённом от среднего положении, в котором действующая на него со стороны пружины сила не равна нулю, называется застоем.

Например, сухое трение в подшипниках измерительных приборов со стрелками, ограничивает их чувствительность. Наличие области застоя делает неопределённым положение равновесия, в котором устанавливается стрелка

¹ Закон $F_{тр} = \mu N$ часто называют законом Кулона (или Амонтона)

при измерениях, то есть ограничивает точность измерения.

Условие равенства сил трения и упругости дают границы области застоя

$$|x| \leq a = \frac{\mu mg}{k} = \frac{\mu g}{\omega^2} = \frac{\mu g}{4\pi^2} T^2, \quad \text{где } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

При решении задачи удобно перейти к безразмерным переменным и параметрам

$$\tau = \omega t, \quad X = \frac{x}{a}, \quad V_x = \frac{v_x}{v_a}, \quad v_x = \frac{dx}{dt} = a\omega \frac{dX}{d\tau} = v_a V_x, \quad v_a = \omega a = \sqrt{\frac{k}{m}} \mu g \frac{m}{k} = \mu g \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Получаем обыкновенное, дифференциальное, линейное, с постоянными коэффициентами, неоднородное уравнение второго порядка.

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + \text{sign}2\left(\frac{dX}{d\tau}, X\right) + X = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d^2 X}{d\tau^2} + X = -\text{sign}2\left(\frac{dX}{d\tau}, X\right), \quad (20.6.6)$$

в котором нет параметров и решение зависит только от начальных условий

$$X|_{\tau=0} = X_0, \quad \frac{dX}{d\tau}|_{\tau=0} = V_{0x}. \quad (20.6.7)$$

Уравнение (20.6.6) содержит два хорошо известных предельных случая.

Таблица 1

<p>При отсутствии силы трения ($\mu = 0$, $a \rightarrow 0$) – гармонические колебания при отсутствии зоны застоя. Из исходного уравнения (20.6.2.2) имеем</p> $\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = 0, \quad v_x = \frac{dx}{d\tau}.$ <p>Решение с начальными условиями:</p> $\begin{cases} x = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau \\ v_x = -C_1 \sin \tau + C_2 \cos \tau \end{cases}, \quad \begin{cases} x_0 = C_1 \\ v_{0x} = C_2 \end{cases}.$ <p>Получаем $x = x_0 \cos \tau + v_{0x} \sin \tau$,</p> <p>или $x = \sqrt{x_0^2 + v_{0x}^2} \cos(\tau - \tau_0)$, где</p> $\tau_0 = \arctg \frac{v_{0x}}{x_0} - \text{ время в точке первой остановки. Этот случай реализуется, если } X_0 \gg 1 \text{ и/или } V_{0x} \gg 1.$	<p>При отсутствии пружины ($k = 0$, $a \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$) – торможение с постоянным ускорением внутри зоны застоя. Из (20.6.2.2) имеем</p> $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\text{sign}2(v_x, x) \mu g.$ $v_x = v_{0x} - \text{sign}(v_{0x}) \mu g t.$ <p>При $v_{0x} = 0$ движение вообще не начнётся. Иначе оно закончится при</p> $t_0 = \frac{v_{0x}}{\text{sign}(v_{0x}) \mu g} = \frac{v_0}{\mu g}.$ $x = x_0 + v_{0x} t - \text{sign}(v_{0x}) \mu g \frac{t^2}{2}$ <p>Этот случай реализуется, если $X_0 \ll 1$ и/или $V_{0x} \ll 1$.</p>
---	---

Уравнение (20.6.6) содержит разрывную функцию, поэтому интегрирование проводим поэтапно, в пределах каждого размаха отдельно.

Задача симметрична, поэтому без ограничения общности можно считать, что всегда $X_0 \geq 0$, а начальная скорость может быть разной по направлению.

6.2. Движение без начальной скорости

Сначала рассмотрим простой случай, когда $V_{0x} = 0$, то есть движение влево начинается без начальной скорости из крайней правой точки (рис.20.6.1).

Из (20.6.6) получается

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + X = +1. \quad (20.6.12)$$

Решение ищем в виде

$$\begin{cases} X = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau + 1 \\ \frac{dX}{d\tau} = -C_1 \sin \tau + C_2 \cos \tau \end{cases}.$$

Из начальных условий получим

$$\begin{cases} X_0 = C_1 + 1 \\ 0 = C_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} C_1 = X_0 - 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}.$$

Окончательное решение на этом этапе ($n_1 = 1$)

$$\begin{cases} X = (X_0 - 1) \cos \tau + 1 \\ V_x = -(X_0 - 1) \sin \tau \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} X = A \cos \tau + 1 \\ V_x = -A \sin \tau \end{cases}, \text{ где } A = X_0 + 1 - 2n_1.$$

Заметим, что это решение справедливо только при $X_0 > 1$. В ином случае движение вообще не начнётся, и $X(\tau) = X_0$.

Этап закончится, когда скорость станет равной нулю, то есть при $\tau_1 = \pi = \pi n_1$, и координате $X_1 = 2 - X_0$.

Если при этом тело вышло за пределы области застоя в отрицательной области, а это возможно только при $X_0 > 3$, то начнётся следующий этап ($n_2 = 2$) движения вправо, описываемый уравнением

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + X = -1, \quad (20.6.16)$$

и начальными условиями, являющимися конечными для предыдущего этапа.

Решение ищем в виде

$$\begin{cases} X = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau - 1 \\ \frac{dX}{d\tau} = -C_1 \sin \tau + C_2 \cos \tau \end{cases}.$$

Из начальных условий получим

$$\begin{cases} 2 - X_0 = C_1 \cos \pi - 1 \\ 0 = -C_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} C_1 = X_0 - 3 \\ C_2 = 0 \end{cases}.$$

Окончательное решение на этом этапе ($n_2 = 2$)

$$\begin{cases} X = (X_0 - 3) \cos \tau - 1 \\ V_x = -(X_0 - 3) \sin \tau \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} X = A \cos \tau - 1 \\ V_x = -A \sin \tau \end{cases}, \text{ где } A = X_0 + 1 - 2n_2.$$

Этот этап закончится, когда опять скорость станет равной нулю, то есть при $\tau_2 = 2\pi = \pi n_2$, и координате $X_2 = X_0 - 4$. И так далее.

Таким образом, можно получить общие формулы для координаты и скорости тела

$$\begin{cases} X = (X_0 + 1 - 2n) \cos \tau - (-1)^n \\ V_x = -A \sin \tau \end{cases}, \text{ где } n = \text{trunc}\left(\frac{\tau}{\pi}\right) + 1. \quad (20.6.20)$$

Здесь n – номер текущего полупериода, или номер этапа интегрирования, $\text{trunc}(x)$ – функция взятия целой части числа², например, $\text{trunc}(2,71) = 2$.

Таким образом, получаем колебательное движение с безразмерным периодом 2π и линейно убывающей амплитудой, что является серьёзным отличием от колебаний при вязком трении. Кроме того, движение прекращается не в положении равновесия $X_m = 0$, а в произвольной точке внутри области застоя $-1 \leq X_m \leq 1$.

Из последнего можно оценить номер последнего этапа колебаний.

$$-1 \leq (X_0 - 2n_m + 1) \cos \pi n_m - (-1)^{n_m} \leq 1$$

Таблица 2

n_m – чётное	n_m – нечётное
$-1 \leq (X_0 - 2n_m + 1) - 1 \leq 1$ $-1 \leq X_0 - 2n_m \leq 1$ $-1 - X_0 \leq -2n_m \leq 1 - X_0$ $X_0 + 1 \geq 2n_m \geq X_0 - 1$ $\frac{X_0 - 1}{2} \leq n_m \leq \frac{X_0 + 1}{2}$	$-1 \leq (X_0 - 2n_m + 1)(-1) + 1 \leq 1$ $-1 \leq 2n_m - X_0 \leq 1$ $X_0 - 1 \leq 2n_m \leq X_0 + 1$ $\frac{X_0 - 1}{2} \leq n_m \leq \frac{X_0 + 1}{2}$
То есть в обоих случаях номер этапа вычисляется одинаково, но в зависимости от X_0 берётся левая или правая граница, так как n_m – целое число.	
Координата в момент остановки $\tau_m = \pi n_m$ $X_m = (X_0 - 2n_m + 1)(+1) - 1 = X_0 - 2n_m$	Координата в момент остановки $\tau_m = \pi n_m$ $X_m = (X_0 - 2n_m + 1)(-1) + 1 = -(X_0 - 2n_m)$

Из последнего видно, что если X_0 – чётное число, то остановка произойдет строго в положении равновесия, а если нечётное – на границе области застоя. При произвольном X_0 остановка будет внутри области застоя.

Данное решение в безразмерных переменных при начальном отклонении $X_0 = 9,5$ представлено на рис.20.6.2. Область застоя выделена тёмным цветом. Также на рисунке показаны моменты времени при остановках и асимптотические линии для амплитуды колебаний, уравнения которых можно получить из следующих соображений. За период амплитуда уменьшается на 4

$$\frac{\Delta X}{\Delta \tau} = \frac{-4}{2\pi}, \quad \frac{X - X_0}{\tau} = -\frac{2}{\pi},$$

$$X = -\frac{2}{\pi} \tau + X_0.$$

² В математике операцию определения целой части числа часто обозначают квадратными скобками, например, $[2,71]=2$.

Отсюда также можно получить оценочное время затухания колебаний

$$\tau_{m2} \approx \frac{\pi X_0}{2},$$

которое точно совпадёт с τ_m при чётных X_0 , то есть при остановке в положении равновесия.

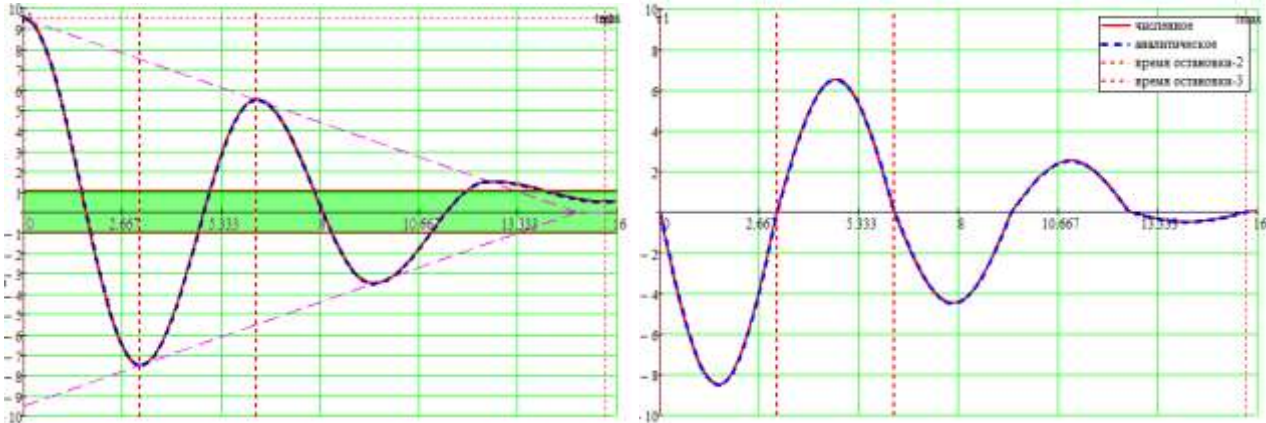


Рис. 20.6.2. Зависимости координаты и скорости от времени.

Из графика скорости также хорошо видно, что после каждой остановки наблюдается излом кривой. Это и понятно, так как в этот момент времени ускорение меняется скачком.

На рис.20.6.3 показана фазовая траектория, то есть зависимость скорости от координаты $V_x(X)$, из которой также хорошо видно уменьшение амплитуды колебаний на ширину зоны застоя за каждую половину периода.

Заметим, что все расчёты проверялись в системе Mathcad путем сравнения аналитических решений и численных методом Рунге-Кутты.

В размерных переменных решение выглядит следующим образом:

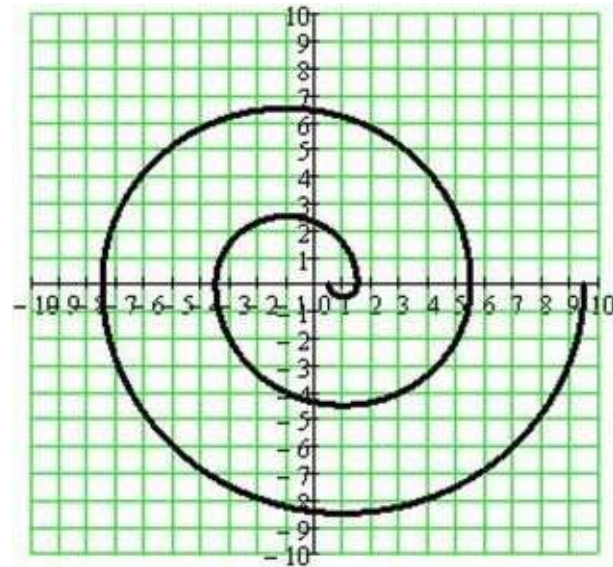


Рис. 20.6.3

$$x = \left(x_0 - (2n-1) \frac{\mu mg}{k} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - (-1)^n \frac{\mu mg}{k}, \quad (20.6.21)$$

$$v_x = -\sqrt{\frac{k}{m}} \left(x_0 - (2n-1) \frac{\mu mg}{k} \right) \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \quad n = \text{trunc} \left(\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + 1 = \text{trunc} \left(\frac{2t}{T} \right) + 1.$$

6.3. Движение с начальной скоростью

Пусть теперь в начальный момент времени у тела существует скорость, направленная вправо или влево. Уравнение (20.6.6) принимает вид

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + X = -1, \text{ при } V_x = \left. \frac{dX}{d\tau} \right|_{\tau=0} = V_{0x} > 0 \quad (20.6.25)$$

или

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + X = +1, \text{ при } V_x = \left. \frac{dX}{d\tau} \right|_{\tau=0} = V_{0x} < 0. \quad (20.6.26)$$

Этот случай отличается от рассмотренного ранее существованием нулевого этапа, пока груз приходит в момент времени τ_0 в первую точку остановки с нулевой скоростью. Потом всё происходит аналогично рассмотренному ранее.

Повторяя поэтапное интегрирование, после аналогичных предыдущему случаю несложных, но громоздких вычислений можно получить общую формулу.

Здесь ещё раз необходимо переопределить знаковую функцию

$$\text{signl}(V_{0x}) = \begin{cases} 1, & V_{0x} \geq 0 \\ -1, & V_{0x} < 0 \end{cases}.$$

Такое определение станет более понятным, если вернуться к размерным переменным.

Тогда

$$A_0 = \sqrt{(X_0 + \text{signl}(V_{0x}))^2 + V_{0x}^2}, \quad \tau_0 = \arcsin \frac{|V_{0x}|}{A_0},$$

$$X = \text{signl}(V_{0x}) \left[(A_0 - 2n) \cos(\tau - \tau_0) - (-1)^n \right],$$

$$V_x = -\text{signl}(V_{0x})(A_0 - 2n) \sin(\tau - \tau_0),$$

где $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ – по-прежнему, номер текущего полупериода, или номер этапа интегрирования. Начальное движение до первой остановки считаем нулевым этапом. Заметим, что τ_0 удобнее выражать через синус, как неразрывную функцию с легко определяемыми знаками.

Легко понять, что остановки произойдут в моменты времени $\tau_n = \tau_0 + \pi n$.

Уравнение асимптотических линий можно получить из следующих соображений. В начале соответствующего (не нулевого) этапа

$$\tau = \tau_0, n_1 = 1, X_1 = A_0 - 2 + 1 = A_0 - 1.$$

$$\tau_3 = \tau_0 + 2\pi, n_3 = 1, X_3 = A_0 - 6 + 1 = A_0 - 5.$$

Эти точки должны лежать на прямой вида $X = k\tau + b$.

Получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 - 1 = k\tau_0 + b \\ A_0 - 5 = k(\tau_0 + 2\pi) + b \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} 4 = -2\pi k \\ b = A_0 - 1 - k\tau_0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} k = -\frac{2}{\pi} \\ b = A_0 - 1 + \frac{2}{\pi}\tau_0 \end{array} \right.$$

Тогда уравнение асимптоты

$$A(\tau) = -\frac{2}{\pi}\tau + A_0 - 1 + \frac{2}{\pi}\tau_0 = -\frac{2}{\pi}(\tau - \tau_0) + A_0 - 1.$$

Отсюда можно оценить время затухания колебаний

$$0 = -\frac{2}{\pi}(\tau_m - \tau_0) + A_0 - 1. \quad \tau_m \approx \frac{\pi}{2}(A_0 - 1) + \tau_0.$$

Точно это время определяется как в предыдущем случае. В момент конечной остановки $\tau_m = \tau_0 + \pi n_m$ груз находится внутри области застоя.

$$-1 \leq (A_0 - 2n_m)\cos(\pi n_m) - (-1)^{n_m} \leq 1.$$

Решая это уравнение, получаем

Таблица 3

Во всех случаях, кроме A_0 – чётное	A_0 – чётное (если $V_{0x} = 0$, X_0 – нечётное)
$n_m = \text{trunc}(\frac{A_0}{2})$	$n_m = \text{trunc}(\frac{A_0}{2} - 1)$

Модуль конечной координаты равен

$$|X_m| = \left| 2 \left\{ \frac{A_0}{2} \right\} - 1 \right|$$

Здесь $\{x\}$ – стандартное обозначение дробной части числа x . $\{x\} = x - [x]$.

Знак координаты зависит от знака начальной скорости и номера конечного этапа.

Частные случаи:

$|X_m| = 1$, если $\frac{A_0}{2}$ – целое, то есть A_0 – чётное число.

$|X_m| = 0$, если $\frac{A_0}{2} = *,5$, то есть A_0 – нечётное число.

Если нет начальной скорости, то $A_0 = X_0 + 1$.

$$|X_m| = \left| 2 \left\{ \frac{X_0 + 1}{2} \right\} - 1 \right|$$

$|X_m| = 1$, если X_0 – нечётное число.

$|X_m| = 0$, если X_0 – чётное число.

Здесь же заметим, что $2\text{trunc}(\frac{A_0}{2}) \neq \text{trunc}(A_0)$. Например, если $A_0 = 5,3$, то $2\text{trunc}(2,65) \neq \text{trunc}(5,3)$, $2 \cdot 2 \neq 5$.

Общий вид зависимости координаты и скорости от времени при $X_0 = 7$ и $V_{0x} = 6$ ($n_m = 4$) представлен на рис.20.6.4

Хорошо видно, что при каждой остановке изменяется наклон касательной к графику скорости, то есть ускорение меняется скачком, как это и должно быть при разрывном изменении силы трения.

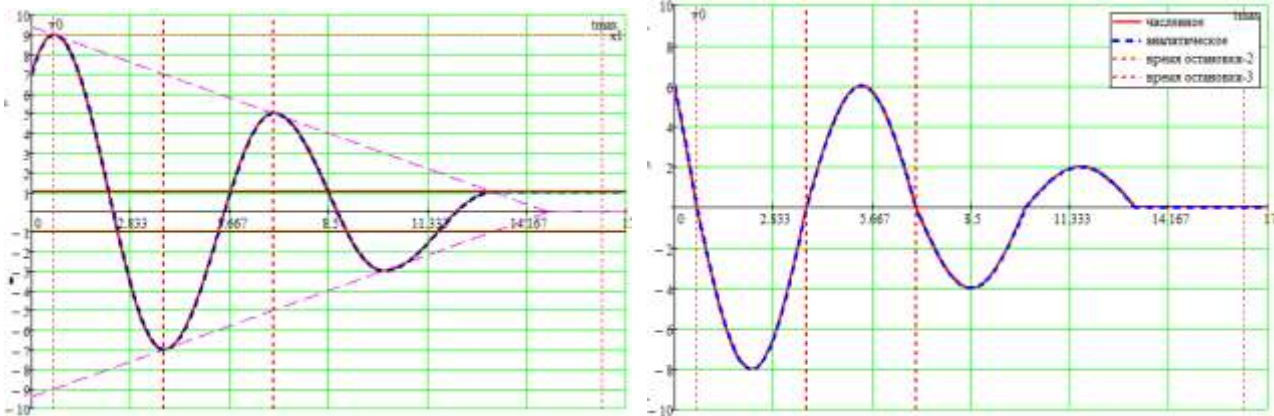


Рис. 20.6.4

Общий вид зависимости координаты и скорости от времени при $X_0 = 9$ и $V_{0x} = -6$ ($n_m=4$) представлен на рис.20.6.5

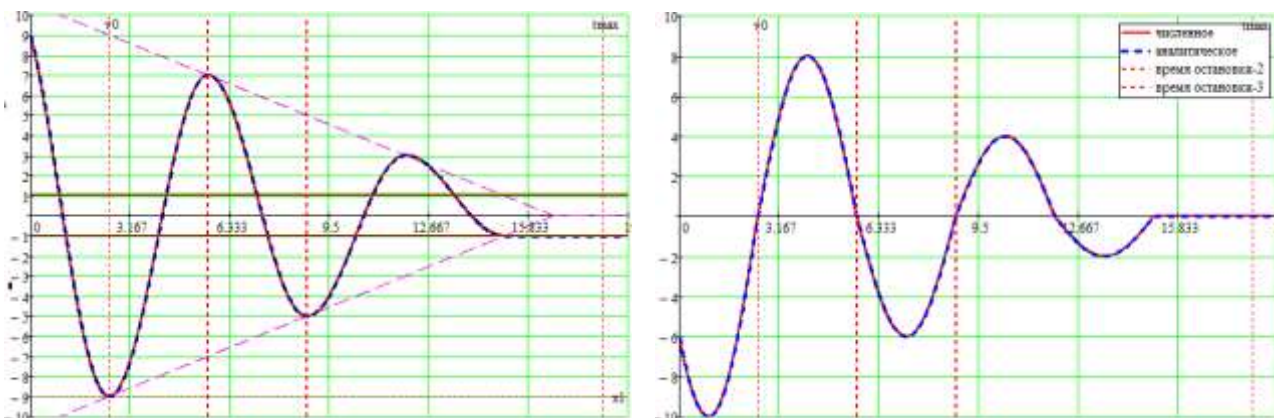


Рис. 20.6.5

6.4. Энергетика и путь

Перепишем формулу (20.6.2) в виде

$$m \frac{dv_x}{dt} + kx = F_{mpx} \quad (20.6.33)$$

и умножим на $v_x dt = dx$. Получаем $mv_x dv_x + kxdx = F_{mpx} v_x dt$.

Так как сила трения всегда противоположна скорости, то

$$d\left(\frac{mv_x^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\right) = -\mu mg |v_x| dt, \quad (20.6.34)$$

то есть теорему об изменении полной механической энергии при наличии диссипативной силы. Её же можно записать как

$$\left(\frac{mv_x^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\right) - \left(\frac{mv_{x0}^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2}\right) = -\mu mg \Pi, \quad (20.6.35)$$

где Π – путь, пройденный телом.

В безразмерных переменных (20.6.35) принимает вид

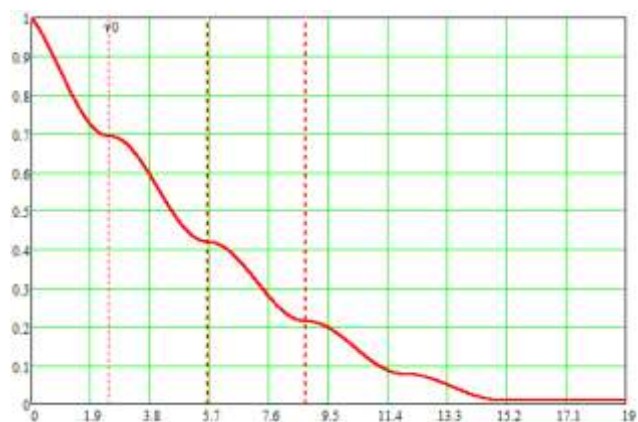


Рис. 20.6.6

$$\Pi_a = \left(\frac{V_{0x}^2}{2} + \frac{X_0^2}{2} \right) - \left(\frac{V_x^2}{2} + \frac{X^2}{2} \right), \quad (20.6.36)$$

где $\Pi_a = \Pi/a$ – безразмерный путь. Зависимость энергии, отнормированной на начальную энергию, от времени представлена на рис. 20.6.6.

6.5. Путь без начальной скорости

При таком движении до полной остановки тело пройдёт путь

$$\Pi_a = \frac{X_0^2 - X_m^2}{2}. \quad (20.6.37)$$

Как уже отмечалось, при чётном отклонении остановка произойдёт строго в положении равновесия ($X_m = 0$), и тогда $\Pi_a = X_0^2/2$. На рисунке 20.6.7 смоделирована эта ситуация при $X_0 = 10$, и очевидно, что путь равен 50 безразмерных единиц.

К вычислению пути можно подойти и по-другому. Из (20.6.20) следует

Этап (полупериод)	Начальная координата	Конечная координата	путь
1	X_0	$-X_0 + 2$	$2X_0 - 2$
2	$-X_0 + 2$	$X_0 - 4$	$2X_0 - 6$
3	$X_0 - 4$	$-X_0 + 6$	$2X_0 - 10$
4	$-X_0 + 6$	$X_0 - 8$	$2X_0 - 14$
5	$X_0 - 8$	$-X_0 + 10$	$2X_0 - 18$

$$\Pi_a = (2X_0 - 2) + (2X_0 - 6) + \dots = 2n_m X_0 - (2 + 6 + 10 + \dots) = 2n_m X_0 - \frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot (n_m - 1)}{2} n_m.$$

$$\Pi_a = 2n_m X_0 - \frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot (n_m - 1)}{2} n_m = 2n_m (X_0 - n_m).$$

Здесь n_m – число этапов. Использована формула суммы арифметической прогрессии. При остановке конечная координата должна оказаться внутри области застоя, то есть $X_0 - 2n_m \leq 1$. Таким образом, $(X_0 - 1)/2 \leq n_m$.

$$n_m \geq \frac{X_0 - 1}{2}, \quad (20.6.40)$$

– ближайшее целое число сверху. Из рис.20.6.2 получаем, что $n_m = (9,5 - 1)/2 = 5$. Тогда путь $\Pi_a = 2 \cdot 5 \cdot (9,5 - 5) = 45$. Тот же результат очевиден из (20.6.37) при конечной координате $x_m = 0,5$.

Если движение происходит с начальной скоростью, то следует добавить расстояние до первой остановки.

Дополнительная литература

Алешкевич В. А., Деденко Л. Г., Караваев В. А. Колебания и волны. Лекции. Изд-во Физического факультета МГУ, 2001 г.

<http://nature.web.ru/db/msg.html?mid=1175042&s=260000022>

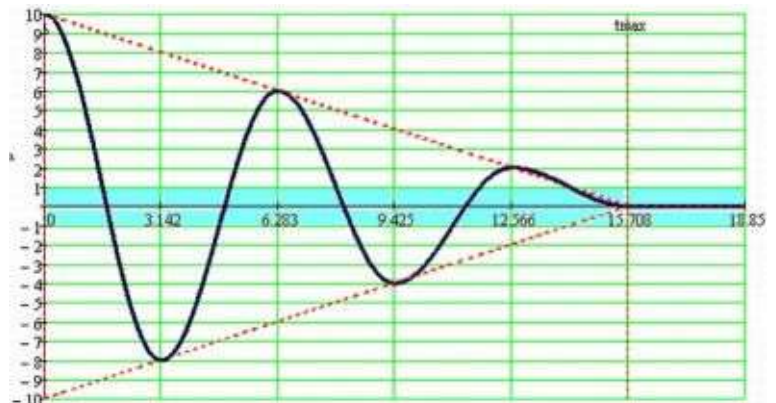


Рис. 20.6.7