

Скин-эффект в цилиндрической геометрии

1. Система уравнений Максвелла и её решение

Рассмотрим провод кругового сечения. Этот случай особенно прост, в связи с тем, что вид поля вне провода заранее ясен. Действительно, в силу симметрии на поверхности провода \vec{E} зависит только от времени. Но при таком граничном условии уравнения $\text{div } \vec{E} = 0$ и $\text{rot } \vec{E} = 0$ в пространстве вне провода имеют лишь решение $\vec{E} = \text{const}$, не зависящее от пространственных координат во всем пространстве. Следовательно, магнитное поле провода будет таким же, каким оно было бы вокруг провода с постоянным током, равным данному мгновенному значению переменного тока.

Итак, пусть имеется очень длинный прямолинейный проводник радиуса R . Используем уравнения Максвелла, закон Ома, материальные уравнения и выражения для rot в цилиндрической системе координат.

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}.$$

$$\text{rot } \vec{E} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r E_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z.$$

При подстановке закона Ома и материальных уравнений в уравнения Максвелла получаем

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.2)$$

Из симметрии задачи очевидно, что $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, тогда

$-\frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_r}{\partial t} \quad (1)$	$-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \sigma E_r + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_r}{\partial t} \quad (4)$
$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} \quad (2)$	$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \sigma E_\varphi + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} \quad (5)$
$\frac{1}{r} \frac{\partial(r E_\varphi)}{\partial r} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (3)$	$\frac{1}{r} \frac{\partial(r H_\varphi)}{\partial r} = \sigma E_z + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (6)$

Очевидно, что эти 6 уравнений распадутся на 2 системы:

с компонентами E_z, H_φ, E_r эта система описывает скин-эффект	с компонентами H_z, E_φ, H_r эта система описывает вихревые токи
$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} \quad (2)$	$-\frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_r}{\partial t} \quad (1)$

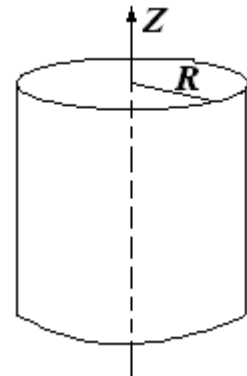


Рис.Ц.1

$-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \sigma E_r + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_r}{\partial t} \quad (4)(\Pi_{xx}.1.7)$	$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (3)$
$\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} = \sigma E_z + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (6)$	$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \sigma E_\varphi + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} \quad (5)$