

Вертикальные вынужденные колебания шара на пружине в среде с учётом 2-х сил сопротивления

Рассмотрим колебательную систему, состоящую из шара массой m на вертикальной пружине, верхний конец которой может колебаться вверх-вниз с частотой ω по закону

$$x_m \cos \omega t, \quad (1)$$

где x_m – амплитуда его колебаний. Задача одномерная, поэтому единственную ось OX направим вниз (рис. 1).

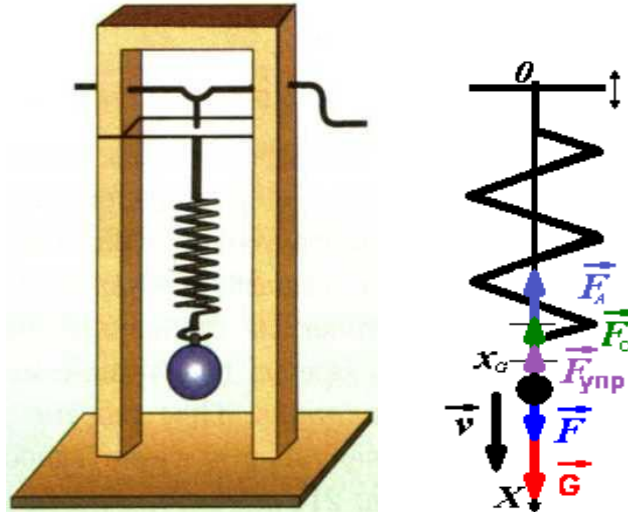


Рис. 1. Схема установки и силы

Тогда координата центра шара, отсчитанная от центра положения точки подвеса (размеры шара стоит учитывать),

$$x(t) = l(t) + x_m \cos \omega t + \frac{d}{2}, \quad (2)$$

где $l(t)$ – длина пружины в текущий момент времени.

На груз действуют:

$\vec{F}_{\text{упр}}(t) = -k(l(t) - l_0)$ – сила упругости со стороны пружины;

$\vec{G} = m\vec{g} = \rho V \vec{g}$ – сила тяжести;

$\vec{F}_A = -\rho_0 V \vec{g}$ – сила Архимеда;

А сила сопротивления среды складывается из двух слагаемых:

$\vec{F}_1 = -3\pi\eta d\vec{v}$ – сила сопротивления среды по Стоксу (G. Stokes)

$\vec{F}_2 = -c \frac{\rho_0 S}{2} v\vec{v}$ – сила аэродинамического (лобового) сопротивления по

Ньютону (I. Newton) [Путилов, с. 205]. Считается, что учёт последней силы актуален при сравнительно больших скоростях, когда сопротивление жидкости или газа обусловлено в основном затратой работы на образование вихрей. Только что называть большой скоростью?

В этих формулах использованы следующие обозначения:

g – ускорение свободного падения, k – коэффициент жёсткости пружины, l_0

– длина нерастянутой пружины, d – диаметр шара, ρ – плотность материала шара, $V = \frac{\pi d^3}{6}$ и $m = \rho V$ – его объём и масса, v – линейная скорость шара, ρ_0 – плотность среды, η – коэффициент динамической вязкости среды.

В данных формулах также использованы следующие обозначения: $S = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную к направлению движения (миделевое (От нидерл. Middel — средний, середина) сечение), c – коэффициент, различный для тел разных форм, называемый коэффициентом лобового сопротивления. В нашей задаче будет использовано значение для шара $c=0,5$ (или $0,48?$).

По теореме о движении центра масс в проекциях на ось ОХ имеем

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(l(t) - l_0) + \rho V g - \rho_0 V g - 3\pi\eta d \frac{dx}{dt} - c \frac{\rho_0}{2} \frac{\pi d^2}{4} \left| \frac{dx}{dt} \right| \frac{dx}{dt}, \quad (3)$$

А с учётом (2)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \left(x - x_m \cos \omega t - l_0 - \frac{d}{2} \right) + (\rho - \rho_0) \frac{\pi d^3}{6} g - 3\pi\eta d \frac{dx}{dt} - c \frac{\rho_0}{2} \frac{\pi d^2}{4} \left| \frac{dx}{dt} \right| \frac{dx}{dt}, \quad (4)$$

Проведём некоторые преобразования

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{3\pi\eta d}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{c\rho_0\pi d^2}{8m} \left| \frac{dx}{dt} \right| \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{kx_m}{m} \cos \omega t + \frac{k}{m} \left(l_0 + \frac{d}{2} \right) + \left(1 - \frac{\pi d^3 \rho_0}{6m} \right) g, \quad (5)$$

Если система не движется, находится в равновесии и отсутствует внешняя сила, то сила тяжести с поправкой на силу Архимеда и сила упругости уравниваются друг друга

$$x_G = \left(l_0 + \frac{d}{2} \right) + \left(m - \frac{\pi d^3 \rho_0}{6} \right) \frac{g}{k}, \quad (6)$$

где x_G – координата точки равновесия.

Тогда уравнение (5) принимает вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{3\pi\eta d}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{c\rho_0\pi d^2}{8m} \left| \frac{dx}{dt} \right| \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} (x - x_G) = \frac{kx_m}{m} \cos \omega t, \quad (7)$$

Введём обозначения

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad \delta = \frac{3\pi\eta d}{2m}, \quad , \quad \frac{1}{r_2} = \frac{c\rho_0\pi d^2}{8m}, \quad r_2 = \frac{8m}{c\rho_0\pi d^2} = \frac{4md}{3cm_0} \quad (8)$$

ω – собственная циклическая частота и T_0 – собственный период колебаний, δ – декремент затухания, r_2 – расстояние, при котором только под действием силы \vec{F}_2 скорость уменьшается в e раз. (см ниже).

Тогда уравнение (7) принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \frac{1}{r_2} \left| \frac{dx}{dt} \right| \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_G + \omega_0^2 x_m \cos \omega t, \quad (9)$$

Произвольные начальные условия

$$x|_{t=0} = x_0, \quad v_x|_{t=0} = v_0. \quad (10)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, нелинейное (3-е слагаемое в левой части), с постоянными коэффициентами, неоднородное с двумя вынуждающими силами: постоянной и гармонической.

постоянная составляющая (сила тяжести с поправкой на силу Архимеда) приводит к смещению положения равновесия в точку x_G .

Или систему двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -2\delta v_x - \frac{1}{r_2} |v_x| v_x - \omega_0^2 (x - x_G) + \omega_0^2 x_m \cos \omega t \\ \frac{dx}{dt} = v_x \end{cases}. \quad (11)$$

Для программирования

параметры	характеристики
1. Масса шара	1. Плотность материала шара
2. Диаметр шара	2. Масса среды в объёме шара
3. Коэффициент сопротивления для шара	3. Координата положения равновесия
4. Коэффициент жесткости пружины	4. Характерное расстояние
5. Длина нерастянутой пружины	5. Декремент затухания
6. Плотность среды	6. циклическая частота гармонических колебаний
7. Коэффициент динамической вязкости среды	7. собственная циклическая частота колебаний
8. Амплитуда вынуждающей силы	8. Циклическая частота вынуждающей силы
9. Частота вынуждающей силы	9. Период гармонических колебаний
10. Начальная координата	10. Период собственных колебаний
11. Начальная скорость	11. Период вынуждающей силы
12. Время расчета	12. Логарифм. декремент затухания
	13. Добротность
	14. Резонансная частота, если только одна сила сопротивления
	15. Вязкость для критического режима
	16.

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \text{ - Резонансная частота}$$

Условие критического режима, если только одна сила сопротивления

$$\delta = \frac{3\pi\eta d}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$$

$$\eta_{кр} = \frac{2}{3\pi d} \sqrt{km} \text{ - Критическая вязкость.}$$

В работе:

Бобылев Ю. В., Грибков А. И., Романов Р. В. Аналитическое, компьютерное и натурное моделирование падения шара в вязкой среде // Балтийский гуманитарный журнал, 2019, Т. 8, №3(28), С.17-20

получен критерий:

силой F_2 можно пренебрегать, то есть $F_1 \gg F_2$, если

$$b = \frac{c\rho_0(\rho - \rho_0)gd^3}{108\eta^2} \ll 1. \quad (7)$$

Отсюда

$$\frac{6m}{\pi} - \rho_0 d^3 \ll \frac{108\eta^2}{c\rho_0 g}$$

Тогда

$$d \gg \sqrt[3]{\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{6m}{\pi} - \frac{108\eta^2}{c\rho_0 g} \right)} \quad \text{или} \quad \eta \gg \sqrt{\frac{c\rho_0 g \left(\frac{6m}{\pi} - \rho_0 d^3 \right)}{108}}$$