

## Вынужденные колебания груза на пружине в вертикальной плоскости

### 1. Постановка задачи и вывод уравнений

Груз массой  $m$  висит на нижнем конце пружины с коэффициентом жёсткости  $k$ . Верхний конец пружины прикреплен к точке  $O_1$ , которая может двигаться с ускорением  $\vec{a}_{O_1}$  горизонтально. Пружина не изгибается. Упругость сохраняется при любом растяжении.

В НИСО, связанной с точкой  $O_1$  добавляется ещё сила инерции

$$m\vec{a}_1 = -k(\vec{l} - \vec{l}_0) - \mu\vec{v} + m\vec{g} - m\vec{a}_{O_1},$$

где  $l_0$  – длина нерастянутой пружины,  $\mu$  – коэффициент сопротивления, который, видимо, зависит не только от среды, но и самой пружины. Сила сопротивления, действующая на груз (шарик), на рисунке не показана.

В проекциях на оси  $O_1X_1$ , направленную горизонтально вправо, и  $O_1Y_1$ , направленную вниз, получаем

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{\mu}{m} \frac{dx}{dt} - \frac{k}{m}(x_1 - l_0 \sin \alpha) - a_{O_1, x_1}, \quad (1)$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\frac{\mu}{m} \frac{dy}{dt} - \frac{k}{m}(y_1 - l_0 \cos \alpha) + g.$$

Заметим, что сила трения пропорциональна скорости относительно среды.  $\vec{v}_{\text{груза отн}} = \vec{v}_{\text{груза абс}} - \vec{v}_{\text{пер}}$ ,  $\vec{v}_{\text{среды отн}} = -\vec{v}_{\text{пер}}$ ,  $\vec{v}_{\text{трения}} = \vec{v}_{\text{груза отн}} - \vec{v}_{\text{среды отн}} = \vec{v}_{\text{груза абс}}$ .

Очевидно, что  $\cos \alpha = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ ,  $\sin \alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ .

Введём обозначения:  $\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \omega_y^2$  – собственная частота вертикальных колебаний,

$\delta = \frac{\mu}{2m}$  – декремент затухания. Считаем, что координата точки  $O_1$  в неподвижной ИСО  $XOY$  меняется по гармоническому закону  $x_{O_1} = x_m \sin \omega t$ , а её ускорение  $a_{O_1, x_1} = -x_m \omega^2 \sin \omega t$ . Тогда  $y = y_1$ ,  $x = x_1 + x_m \sin \omega t$ ,  $x_1 = x - x_m \sin \omega t$ ,

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx}{dt} - x_m \omega \cos \omega t, \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} + x_m \omega^2 \sin \omega t.$$

После подстановки

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x_m \omega^2 \sin \omega t = -2\delta \frac{dx}{dt} - \omega_0^2 \left( x - x_m \sin \omega t - \frac{l_0(x - x_m \sin \omega t)}{\sqrt{(x - x_m \sin \omega t)^2 + y^2}} \right) + x_m \omega^2 \sin \omega t.$$

Получаем систему обычных колебательных уравнений с переменной и

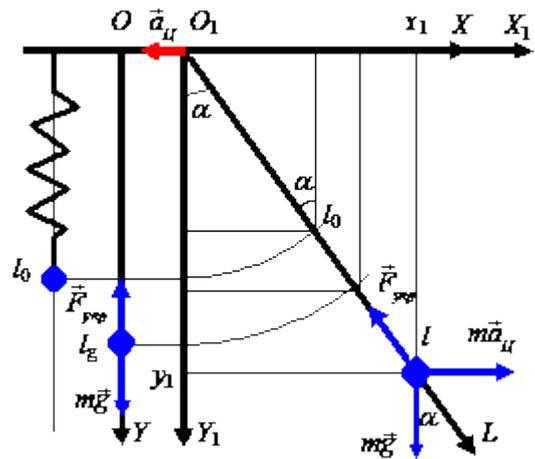


Рис. 1.

постоянной вынуждающей силой, которые портит слагаемое, отвечающее за немалость углов и смещение на начальную длину.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\delta \frac{dx}{dt} - \omega_0^2 (x - x_m \sin \omega t) \left( 1 - \frac{l_0}{\sqrt{(x - x_m \sin \omega t)^2 + y^2}} \right), \quad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\delta \frac{dy}{dt} - \omega_0^2 y \left( 1 - \frac{l_0}{\sqrt{(x - x_m \sin \omega t)^2 + y^2}} \right) + g.$$

Аналитически эти уравнения не решаются.

## 2. Частный случай

Точка подвеса стоит на месте  $\omega = 0$  и нет трения. Свободные колебания в перпендикулярных направлениях.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \left( 1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \quad (3)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_0^2 y \left( 1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + g.$$

При малых углах, то есть при  $x \ll y$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \left( 1 - \frac{l_0}{|y|} \right),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_0^2 y \left( 1 - \frac{l_0}{|y|} \right) + g = -\omega_0^2 (y - l_g), \text{ где } l_g = l_0 + \text{sign}(y) \frac{g}{\omega_0^2}, \Delta l_g = \text{sign}(y) \frac{g}{\omega_0^2}.$$

Ищем решение в виде  $y = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + l_g$ . При начальных условиях  $y|_{t=0} = y_0$ ,  $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = v_{0y}$ , получаем

$$y = (y_0 - l_0 - \Delta l_g) \cos \omega_0 t + \frac{v_{0y}}{\omega_0} \sin \omega_0 t + l_0 + \Delta l_g = A_y \cos(\omega_0 t - \varphi) + l_0 + \Delta l_g, \quad (4)$$

$$\text{где } A_y = \sqrt{(y_0 - l_0 - \Delta l_g)^2 + \left( \frac{v_{0y}}{\omega_0} \right)^2}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{v_{0y}}{\omega_0 (y_0 - l_0 - \Delta l_g)}.$$

Если  $A_y \ll l_g$ ,

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx -\omega_0^2 x \left( 1 - \frac{l_0}{|l_g|} \right) \approx -\omega_0^2 x \left( \frac{\Delta l_g}{l_0 + \Delta l_g} \right).$$

При аналогичных начальных условиях  $x|_{t=0} = x_0$ ,  $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_{0x}$  получаем

решение

$$x = x_0 \cos(\omega_x t) + \frac{v_{0x}}{\omega_x} \sin(\omega_x t) = A_x \cos(\omega_x t - \varphi_x), \quad (5)$$

где  $A_x = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{0x}}{\omega_x}\right)^2}$ .  $\operatorname{tg} \varphi_x = \frac{v_{0x}}{\omega_x x_0}$

Частота горизонтальных колебаний

$$\omega_x = \omega_0 \sqrt{\frac{\Delta l_g}{l_0 + \Delta l_g}} = \sqrt{\frac{\omega_0^2 \Delta l_g}{l_0 + \Delta l_g}} = \sqrt{\frac{g}{l_0 + \frac{mg}{k}}} = \sqrt{\frac{g}{l_0 + \frac{g}{\omega_0^2}}} = \sqrt{\frac{g}{l_g}}, \quad (6)$$

то есть колебания с меньшей частотой и бóльшим периодом. Похоже на колебания математического маятника.

Траекторию колебаний в виде эллипса и его частных случаев при таких условиях получить можно только при  $\Delta l_g \gg l_0$  (школьный динамометр с большим грузом). Фигуры Лиссажу при кратных частотах легче.

$$\frac{\omega_x}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\Delta l_g}{l_0 + \Delta l_g}}, \quad \frac{\omega_x^2}{\omega_0^2} = \frac{\Delta l_g}{l_0 + \Delta l_g}, \quad \omega_x^2 l_0 + \omega_x^2 \Delta l_g = \omega_0^2 \Delta l_g, \quad \omega_x^2 l_0 = \Delta l_g (\omega_0^2 - \omega_x^2)$$

Окончательно

$$\frac{\Delta l_g}{l_0} = \frac{\omega_x^2}{\omega_0^2 - \omega_x^2}. \quad (7)$$

Таким образом можно подобрать относительное удлинение пружины, чтобы получить нужное соотношение частот. Например, если

$\frac{\omega_x}{\omega_0} = \frac{1}{1}$	$\frac{\omega_x}{\omega_0} = \frac{2}{3}$	$\frac{\omega_x}{\omega_0} = \frac{1}{2}$	$\frac{\omega_x}{\omega_0} = \frac{1}{3}$
$\frac{\Delta l_g}{l_0} \rightarrow \infty$	$\frac{\Delta l_g}{l_0} = \frac{4}{5} = 0,800$	$\frac{\Delta l_g}{l_0} = \frac{1}{3} \approx 0,333$	$\frac{\Delta l_g}{l_0} = \frac{1}{8} = 0,125$

Сдвиг фаз определяется начальными значениями. Численное решение очень чувствительно к ним.

### 3. Безразмерный вид уравнений

Введём безразмерные параметры:  $\tau = \omega_0 t$  – безразмерное время,  $\alpha = \frac{\delta}{\omega_0}$  –

безразмерный декремент затухания,  $\beta = \frac{\omega}{\omega_0}$  – отношение частоты

вынуждающей силы к собственной вертикальной частоте. Координаты,

обезразмеренные на длину нерастянутой пружины  $X = \frac{x}{l_0}$ ,  $Y = \frac{y}{l_0}$ ,  $X_m = \frac{x_m}{l_0}$  –

отношение амплитуды вынуждающей силы к начальной длине пружины.

Величина  $\Delta Y_g = \frac{g}{\omega_0^2 l_0} = \frac{mg}{kl_0} = \frac{\Delta l_g}{l_0}$  – относительное удлинение.

Тогда уравнения принимают вид

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} = -2\alpha \frac{dX}{d\tau} - (X - X_m \sin \beta\tau) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{(X - X_m \sin \beta\tau)^2 + Y^2}} \right), \quad (8)$$

$$\frac{d^2 Y}{d\tau^2} = -2\alpha \frac{dY}{d\tau} - Y \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{(X - X_m \sin \beta\tau)^2 + Y^2}} \right) + \Delta Y_g.$$

Здесь 4 параметра:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $X_m$ ,  $\Delta Y_g$ . Смысл их описан чуть выше. Последний параметр определяет отношение горизонтальной и вертикальной частот.

$$\frac{\omega_x}{\omega_0} = \frac{\omega_x}{\omega_y} = \sqrt{1 + \Delta Y_g}, \quad (9)$$

См. таблицу выше.

Система дополняется 4 начальными условиями

$$X|_{\tau=0} = X_0, \quad \left. \frac{dX}{d\tau} \right|_{\tau=0} = V_{0x}, \quad Y|_{\tau=0} = Y_0, \quad \left. \frac{dY}{d\tau} \right|_{\tau=0} = Y_{0x}. \quad (10)$$

То есть всего 8 изменяющихся величин.

Эти уравнения (8) с начальными условиями (10) и решаются в представленной программе. Также есть расчётный лист для РТС Mathcad.

#### 4. Частный случай

Если нет трения и вынуждающей силы

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + X \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{d^2 Y}{d\tau^2} + Y \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right) - \Delta Y_g = 0.$$

Можно при малых колебаниях получить фигуры Лиссажу. Случай рассмотрен в публикации 2 (см. справку 2)