

# Моделирование движения заряженных частиц в стационарных магнитных полях различной конфигурации (что используется в программе «particle20xx.exe»)

## 1. Основные уравнения

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} [\vec{v}, \vec{B}] \quad (1)$$

где  $q$ - заряд частицы,  $m$  - её масса, а  $\vec{B}$  - индукция магнитного поля.

## 2. Начальные условия

Частица имеет начальные координаты

$$x|_{t=0} = x_0; \quad y|_{t=0} = y_0; \quad z|_{t=0} = z_0;$$

и проекции начальной скорости

$$v_x|_{t=0} = v_{0x}; \quad v_y|_{t=0} = v_{0y}; \quad v_z|_{t=0} = v_{0z};$$

где

$$v_{0x} = v_0 \sin \alpha \cos \beta$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha \sin \beta$$

$$v_{0z} = v_0 \cos \alpha$$

Так как все примеры имеют осевую симметрию, то поворотом плоскости XOY вокруг оси OZ можно добиться, чтобы  $y_0=0$  (в программе не используется).

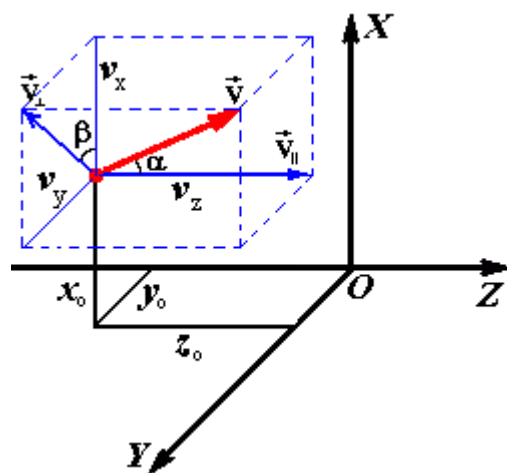


Рис.х.х.х

## 3. Декартова система координат

$$\frac{dx}{dt} = v_x; \quad \frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} (v_y B_z - v_z B_y);$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y; \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m} (v_z B_x - v_x B_z);$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z; \quad \frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m} (v_x B_y - v_y B_x);$$

## 4. Частные случаи

Рассматриваем случаи,  $B_x=B_y=0$ ,  $B_z=B_0 f(x,y)$

$$\frac{dx}{dt} = v_x; \quad \frac{dv_x}{dt} = \frac{qB_0}{m} v_y f(x,y);$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y; \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB_0}{m} v_x f(x,y); \quad \text{или}$$

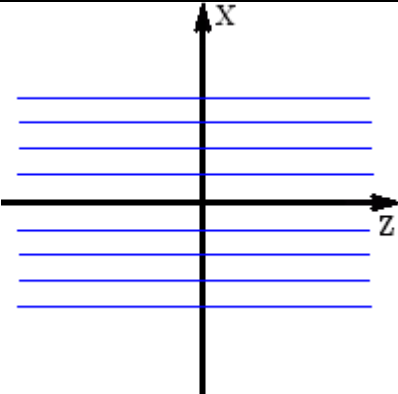
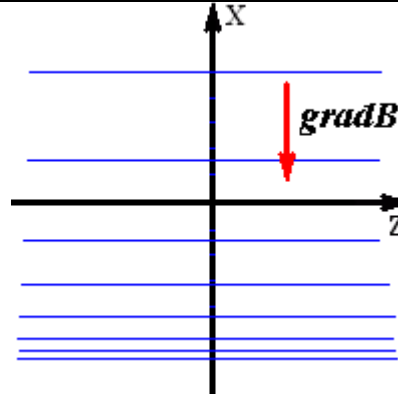
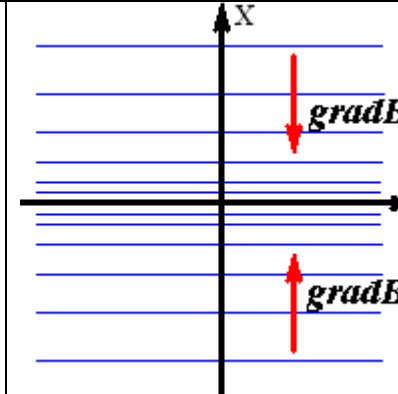
$$\frac{dz}{dt} = v_z; \quad \frac{dv_z}{dt} = 0;$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \text{sign}(q) \cdot \omega_c \cdot v_y \cdot f(x,y);$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\text{sign}(q) \cdot \omega_c \cdot v_x \cdot f(x,y);$$

$$v_z = \text{const} = v_0 \cos \alpha;$$

где  $\omega_c = \frac{|q|B_0}{m}$  - циклотронная частота,  $f(x,y)$  - безразмерная функция, моделирующая структуру поля,  $sign(q)=\pm 1$  - знаковая функция.  
В программе частота берется со знаком, поэтому в формулах  $sign(q)$  не нужен

1. «Однородное поле»	2. «Плоский дрейф»	3. «Осевой дрейф»
поле направлено вдоль оси Oz, а его модуль постоянен	поле направлено вдоль оси Oz, а его модуль зависит только от переменной $x$ , т.е. $\vec{B} = B_z(x)\vec{k}$	поле направлено вдоль оси Oz, а его модуль зависит от расстояния до этой оси, т.е. $\vec{B} = B_z(r)\vec{k}$
$f(x, y) = 1$	$f(x, y) = e^{-\frac{x}{s}}$	$f(x, y) = e^{-\frac{r}{s}} = e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{s}}$
		

Величина  $s$  - имеет размерность и смысл некоторой длины и показывает, как быстро меняется поле. Знак может быть разный.

Первый и третий случай можно рассматривать и в цилиндрической системе координат.

## 5. Цилиндрическая система координат

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= v_r; & \frac{dv_r}{dt} &= \frac{q}{m} (B_z r \omega_z - B_\phi v_z) + r \omega_z^2; \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega_z; & \frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{q}{m} \frac{1}{r} (v_z B_r - v_r B_z) - \frac{2}{r} v_r \omega_z; \\ \frac{dz}{dt} &= v_z; & \frac{dv_z}{dt} &= \frac{q}{m} (v_r B_\phi - B_r r \omega_z),\end{aligned}$$

Если считать, что  $B_z = B_0 f_z(r, z)$ ,  $B_r = B_0 f_r(r, z)$ ,  $B_\phi = B_0 f_\phi(r, z)$ , то

$$\frac{dr}{dt} = v_r; \quad \frac{d\phi}{dt} = \omega_z; \quad \frac{dz}{dt} = v_z;$$

$$\begin{aligned}\frac{dv_r}{dt} &= \frac{qB_0}{m} (f_z r \omega_z - f_\phi v_z) + r \omega_z^2; & \frac{dv_r}{dt} &= \text{sign}(q) \omega_c (f_z r \omega_z - f_\phi v_z) + r \omega_z^2; \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{qB_0}{m} \frac{1}{r} (v_z f_r - v_r f_z) - \frac{2}{r} v_r \omega_z; \text{ или } & \frac{d\omega_z}{dt} &= \text{sign}(q) \omega_c \frac{1}{r} (v_z f_r - v_r f_z) - \frac{2}{r} v_r \omega_z; \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{qB_0}{m} (v_r f_\phi - f_r r \omega_z), & \frac{dv_z}{dt} &= \text{sign}(q) \omega_c (v_r f_\phi - f_r r \omega_z),\end{aligned}$$

## 6. Частные случаи

4. «Магнитная ловушка»	5. «Центробежный дрейф»	6. «Магнитный монополюс»
	Линии поля представляют собой окружности в плоскости XOY, величина поля постоянна $\vec{B} = B_0 \vec{e}_\phi$	«Точечный магнитный заряд» в начале координат. Линии поля – лучи из начала координат $\vec{B} = B_0 \frac{s^2}{(r^2 + z^2)} \vec{e}_\rho$
$B_z = B_0 f_z(r, z)$ $B_r = B_0 f_r(r, z)$ $B_\phi = 0$	$B_z = 0$ $B_r = 0$ $B_\phi = B_0$	$B_z = B_0 \frac{s^2 z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = B_0 f_z(r, z)$ $B_r = B_0 \frac{s^2 r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = B_0 f_r(r, z)$ $B_\phi = 0$

Возвращаясь к первому и третьему случаям, система уравнений выглядит так

$$\begin{aligned}\frac{dv_r}{dt} &= \text{sign}(q) \omega_c f_z r \omega_z + r \omega_z^2 = r \omega_z (\text{sign}(q) \omega_c f_z + \omega_z); \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= -\text{sign}(q) \omega_c \frac{1}{r} v_r f_z - \frac{2}{r} v_r \omega_z = -\frac{v_r}{r} (\text{sign}(q) \omega_c f_z + 2\omega_z); \\ \frac{dv_z}{dt} &= 0,\end{aligned}$$

Для случаев 4 и 6

$$\begin{aligned}\frac{dv_r}{dt} &= r \omega_z (\text{sign}(q) \omega_c f_z + \omega_z); \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{1}{r} (\text{sign}(q) \omega_c (v_z f_r - v_r f_z) - 2v_r \omega_z); \\ \frac{dv_z}{dt} &= -\text{sign}(q) \omega_c f_r r \omega_z,\end{aligned}$$

Для случая 5

$$\frac{dv_r}{dt} = -\text{sign}(q)\omega_c v_z + r\omega_z^2;$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = -\frac{2}{r}v_r\omega_z;$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \text{sign}(q)\omega_c v_r,$$

где функции поля имеют вид

	$B_z$	$B_r$	$B_\varphi$
1	$f_z=1$	0	0
2			
3	$f_z = e^{-\frac{r}{s}}$	0	0
4	$f_z = \frac{A}{r}$ A=1 м	$f_r = A^2 s^2 \left( \frac{1}{(s^2 + (z+d)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(s^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \right) \frac{1}{r}$	0
5	0	0	$f_\varphi=1$
6	$f_z = \frac{s^2 z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$	$f_r = \frac{s^2 r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$	0
7	$f_z = \frac{s}{r}$	$f_r = s^4 \left( \frac{1}{(s^2 + (z+d)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(s^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \right) \frac{1}{r}$	0

Для случая 6 введение s имеет смысл только из-за размерности. На геометрию поля не влияет. Влияет только на величину.

В случае 4 эта величина сильно влияет на структуру поля, следовательно, и на характер движения.

В случае 4 величина A введена для сохранения размерности. Можно использовать для нормировки поля на какую-нибудь величину. В программе A=1 и не используется.

Добавлен еще один вариант магнитной ловушки – 7 – частица движется практически по силовой линии.

## 7. Уравнение Максвелла

Выполняется во всех случаях, за исключением точки начала координат в случае 6, что проверяется простой подстановкой

$$\text{div}\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \text{или} \quad \text{div}\vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

## 8. Линии магнитного поля

Уравнения векторных линий данного магнитного поля может быть получено в результате интегрирования уравнения

$$\frac{dr}{dz} = \frac{B_r}{B_z} = \frac{f_r}{f_z}.$$

Во всех случаях, кроме 4 и 7, они вычисляются и выглядят достаточно просто

Например, для случая 6

$$\frac{dr}{dz} = \frac{r}{z}, \quad \frac{dr}{r} = \frac{dz}{z}, \quad \ln z = \ln r + C, \quad z = kr$$

То есть прямые линии, проходящие через начало координат.

В случае 4:

$$\frac{dr}{dz} = As^2 \left( \frac{1}{(s^2 + (z+d)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(s^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \right),$$

следовательно

$$r = A \left( \frac{z+d}{(s^2 + (z+d)^2)^{1/2}} - \frac{z-d}{(s^2 + (z-d)^2)^{1/2}} \right) + const$$

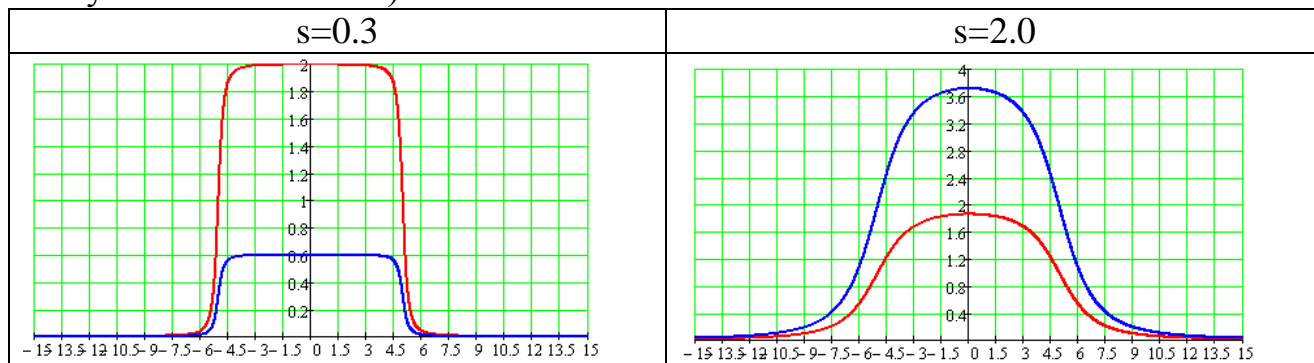
В случае 7:

$$\frac{dr}{dz} = s^3 \left( \frac{1}{(s^2 + (z+d)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(s^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \right),$$

следовательно

$$r = s \left( \frac{z+d}{(s^2 + (z+d)^2)^{1/2}} - \frac{z-d}{(s^2 + (z-d)^2)^{1/2}} \right) + const$$

На рисунке сравнение 2 силовых линий при const=0. (4 случай – красная линия, 7 случай - синяя линия)



## 9. Параметры задачи

$q, m, v_0$

$x_0, y_0, z_0$

$\alpha, \beta$

$B_0, s, d$       всего 11

## 10. Сохранение энергии

Из (1) скалярным умножением можно получить

$$\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} [\vec{v}, \vec{B}] \vec{v}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad v^2 = const$$

$$v_0^2 = v_r^2 + v_z^2 + r^2 \omega_z^2 = v_r^2 + v_z^2 + v_\phi^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

Это используется в программе для контроля расчетов. Вычисляется параметр

$$\delta v = \left| \frac{v_0 - \sqrt{v_r^2 + r^2 \omega_z^2 + v_z^2}}{v_0} \right| \cdot 100\%$$

Результат не превышает единицы процентов.