

# Моделирование опыта Милликена

## 1. Идея эксперимента

Классические опыты Милликена (R. Millikan) и его помощника Флетчера<sup>1</sup> (H. Fletcher) [1, С.87] направлены на прямое доказательство дискретности электрического заряда и определение элементарного электрического заряда.

Теория была предложена в 1906 году, эксперименты проведены в 1909-1914 годах.

Экспериментальный метод заключался в непосредственном измерении заряда очень маленьких капелек масла. Масло при движении по трубе электризуется, а затем, разбиваясь на капли, попадает между обкладками горизонтально расположенного конденсатора (рис.1).

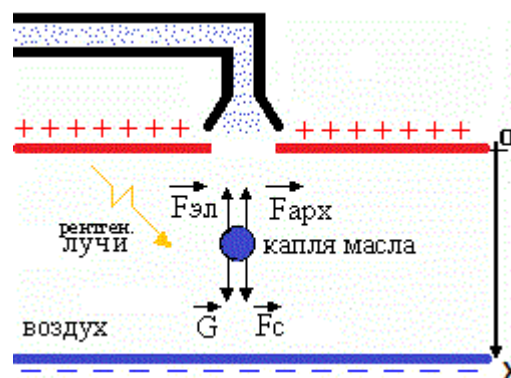


Рис.1. Схема опыта

## 2. Движение заряженной частицы в электрическом поле

Проведём строгое решение задачи о движении заряженной частицы в однородном электрическом поле в вязкой среде. Данное движение описывается следующими уравнениями

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_A + \vec{G} + \vec{F}_C + \vec{F}_e, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad (2.1)$$

где  $\vec{G} = m\vec{g} = \rho V \vec{g}$  – сила тяжести,  $\vec{F}_A = -\rho_0 V \vec{g}$  – сила Архимеда,  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  – сила, действующая на заряженную частицу в электрическом поле с напряженностью  $\vec{E}$ , причём  $E_x = -\frac{\Delta\varphi}{D} = -\frac{U_x}{D}$ , где  $\Delta\varphi = U_x$  – изменение потенциала (напряжение) между обкладками конденсатора, взятое со знаком,  $D$  – расстояние между обкладками конденсатора.  $\vec{F}_C = -3\pi\eta d\vec{v}$  – сила вязкого трения, определяемая по закону Стокса (G. Stokes) [1, С.117].

Здесь  $d$  – диаметр,  $\rho$  – плотность,  $V = \frac{\pi}{6}d^3$  – объём капли,  $\eta$  –

вязкость,  $\rho_0$  – плотность среды.

В проекциях на вертикальную ось  $OX$ , направленную вниз, получим

$$\rho \frac{\pi d^3}{6} \frac{dv_x}{dt} = (\rho - \rho_0) \frac{\pi d^3}{6} g - 3\pi\eta dv_x - \frac{qU_x}{D},$$

или

<sup>1</sup> Флетчер Харви (Harvey Fletcher) (11.09.1884 – 23.07.1981) – американский физик.  
URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Harvey\\_Fletcher](https://en.wikipedia.org/wiki/Harvey_Fletcher)

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{18\eta}{\rho d^2} v_x = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) g - \frac{6qU_x}{\rho\pi d^3 D}, \quad \frac{dx}{dt} = v_x. \quad (2.3)$$

Введём обозначения:

$\tau = \frac{\rho d^2}{18\eta}$  – характерное время,  $v_G = (1 - \frac{\rho_0}{\rho})g\tau$  – предельная скорость при движении без электрического поля,  $v_{Ux} = -\frac{6qU_x}{\rho\pi d^3 D}\tau = -\frac{qU_x}{3\pi d D\eta}$  –

предельная скорость, достигаемая под действием электрического поля без силы тяжести. В зависимости от полярности напряжения и от знака заряда она может быть как положительной, так и отрицательной. Так если заряд капли отрицательный, а полярность соответствует рисунку 1, то  $v_{Ux} < 0$ .

Тогда

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{1}{\tau} v_x = \frac{v_G + v_{Ux}}{\tau}, \quad \text{или} \quad \int_{v_0}^{v_x} \frac{dv_x}{v_G + v_{Ux} - v_x} = \int_{t_0}^t \frac{dt}{\tau},$$

где использовано начальное условие  $v_x|_{t=t_0} = v_0$ . Ненулевые начальные условия использованы потому, что в процессе движения параметры задачи меняются, например, скачком будет меняться заряд капли.

В итоге получаем

$$\ln \frac{v_G + v_{Ux} - v_x}{v_G + v_{Ux} - v_{0x}} = -\frac{t - t_0}{\tau}, \quad \text{или} \quad v_x = (v_G + v_{Ux}) + (v_{0x} - v_G - v_{Ux})e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}. \quad (2.5)$$

Далее ищем зависимость координаты от времени

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v_x dt, \quad \text{с начальным условием} \quad x|_{t=t_0} = x_0.$$

После интегрирования имеем

$$x - x_0 = (v_G + v_{Ux})(t - t_0) + (v_{0x} - v_G - v_{Ux})\tau \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right). \quad (2.7)$$

Уравнения (2.5) и (2.7) полностью дают решение задачи.

Также можно записать связь между координатой и скоростью в любой момент времени. Из (2.5) следует

$$\frac{v_x - v_G - v_{Ux}}{v_{0x} - v_G - v_{Ux}} = e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}.$$

Подставляя в (2.7) имеем формулу

$$x - x_0 = (v_G + v_{Ux})(t - t_0) - (v_x - v_{0x})\tau,$$

которая также может пригодиться.

### 3. Для численных расчетов

Для программирования удобнее провести дальнейшее обезразмеривание переменных.

Капля при протекании по трубе электризуется отрицательно, тогда её заряд  $q = -N|e|$ , где  $N = 0, 1, 2, 3, \dots$ , а  $|e|$  – элементарный заряд. Тогда

$$v_{Ux} = \frac{|e|U_x}{3\pi d D \eta} N.$$

Введём безразмерное время  $T = \frac{t}{\tau}$ , безразмерную скорость  $V = \frac{v}{v_G}$ . Тогда

$$\frac{v_{Ux}}{v_G} = \frac{6|e|U_x}{\pi d^3 D (\rho - \rho_0) g} N = aN, \text{ то есть в уравнениях остаётся один параметр}$$

$$a = \frac{6|e|U_x}{\pi d^3 (\rho - \rho_0) g D} = \frac{F_{ex}}{G - F_A}. \quad (3.1)$$

При указанной полярности  $a < 0$ .

Уравнения (2.5) и (2.7) принимают вид

$$V_x = (1 + aN) + (V_{0x} - 1 - aN)e^{T_0 - T}. \quad (3.2)$$

$$X - X_0 = \left\{ (1 + aN)(T - T_0) + (V_{0x} - 1 - aN)(1 - e^{-(T - T_0)}) \right\}. \quad (3.3)$$

где  $X = \frac{x}{v_G \tau}$ .

### 4. Анализ решения

Будем считать, что у нас есть три этапа движения.

1) Первый этап.  $0 < T \leq T_1$ .  $T_0 = 0$ ,  $V_{0x} = 0$ ,  $U_x = 0$  – напряжение выключено, что равносильно  $N_1 = 0$ . Уравнение для скорости принимает вид

$$V_{1x} = 1 - e^{-T}.$$

2) Второй этап.  $T_1 < T \leq T_2$ .  $T_0 = T_1$ ,  $V_{0x} = V_{1x}(T_1)$ ,  $N = N_2$  – что равносильно включённому напряжению.

$$V_{2x} = (1 + N_2 a) + (V_{1x}(T_1) - 1 - N_2 a)e^{T_1 - T}.$$

3) Третий этап.  $T_2 < T \leq T_3$ .  $T_0 = T_2$ ,  $V_{0x} = V_{2x}(T_2)$ ,  $N = N_3$  – что равносильно изменению заряда под действием света, при ионизации воздуха между пластинами конденсатора (например, при помощи рентгеновских лучей).

$$V_{3x} = (1 + N_3 a) + (V_{2x}(T_2) - 1 - N_3 a)e^{T_2 - T}.$$

Расчёты показывают, что за время порядка  $3\tau$  скорость достигает 95% своего максимального значения [2. С.60] и движение становится практически равномерным. Тогда

$$V_{1x \max} = 1,$$

$$V_{2x \max} = 1 + N_2 a, \quad \text{или} \quad V_{2x \max} - 1 = N_2 a, \quad (4.1)$$

$$V_{3x \max} = 1 + N_3 a, \quad \text{или} \quad V_{3x \max} - 1 = N_3 a.$$

Тогда уравнения для скорости можно переписать в виде удобном для рисования графиков

$$\begin{aligned} V_{1x} &= 1 - e^{-T}, \\ V_{2x} &= V_{2x \max} + (V_{1x}(T_1) - V_{2x \max})e^{T_1 - T}, \\ V_{3x} &= V_{3x \max} + (V_{2x}(T_2) - V_{3x \max})e^{T_2 - T}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из (4.1) следует

$$\frac{N_3}{N_2} = \frac{V_{3x \max} - 1}{V_{2x \max} - 1}, \quad (4.3)$$

то есть можно найти отношение зарядов и доказать, что оно равно отношению небольших целых чисел.

Заметим, что в эту формулу входят только скорости, которые и измерялись в эксперименте.

Продолжая эти рассуждения, можно получить формулу для разности зарядов

$$N_3 - N_2 = \frac{V_{3x \max} - V_{2x \max}}{a}. \quad (4.4)$$

Если рассчитать величину  $a$ , для которой, в свою очередь, надо знать элементарный заряд, который по современным данным<sup>2</sup> равен

$$|e| = 1,6021766208(98) \cdot 10^{-19} \text{ Кл},$$

то, получив систему уравнений, можно найти каждый заряд в отдельности

$$\begin{cases} \frac{N_3}{N_2} = \alpha \\ N_3 - N_2 = \Delta N \end{cases}, \quad \begin{cases} N_3 = \frac{\alpha \Delta N}{\alpha - 1} \\ N_2 = \frac{\Delta N}{\alpha - 1} \end{cases}.$$

В размерном виде формулы (4.3) и (4.4) имеют вид [3, С.14]

$$\begin{aligned} \frac{q_3}{q_2} &= \frac{v_{3x \max} - v_G}{v_{2x \max} - v_G}, \\ q_3 - q_2 &= \frac{\pi d^3 D(\rho - \rho_0) g}{6U_x} \frac{v_{3x \max} - v_{2x \max}}{v_G}. \end{aligned}$$

Можно написать и так

$$N_3 - N_2 = \frac{v_{3x \max} - v_{2x \max}}{av_G} = \frac{3\pi\eta dD}{|e|U_x} (v_{3x \max} - v_{2x \max}), \quad av_G = \frac{|e|U_x}{3\pi\eta dD} = \frac{F_{ex}}{F_c} v,$$

где коэффициент вязкости, как трудно измеряемая величина, может быть

<sup>2</sup> Здесь и далее приводятся значения констант, рекомендуемых CODATA (англ. Committee on Data for Science and Technology — Комитет по данным для науки и техники) по состоянию на 2014 г. В краткой записи цифры в скобках — абсолютная погрешность в разрядах двух последних цифр. [Электронный ресурс]. URL: <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>.

рассчитан как

$$\eta = \frac{(\rho - \rho_0) g d^2}{18 \nu_G}.$$

Если провести опыт несколько раз, то можно получить набор значений заряда. Минимальный из них (или тенденция к минимальному значению) и будет равен элементарному.

## 5. Результаты опыта Милликаена

Облучая каплю несколько раз и меняя напряжение, Милликен проводил с одной каплей много опытов. Измеряя скорости падения и подъёма капли, экспериментатор рассчитал заряд электрона, который по его данным оказался равным

$$e = -1,5719736 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

В опыте использовались следующие параметры:

$$U = 5085 \text{ В;}$$

$$D = 16 \text{ мм;}$$

$$\rho = 919,9 \text{ кг/м}^3;$$

$$\rho_0 = 1,24 \text{ кг/м}^3;$$

$$r = 2,76 \text{ мкм}$$

$$(d = 5,52 \text{ мкм}).$$

Скорость падения у него получилась  $8,58 \cdot 10^{-4}$  м/с. По формулам (4.1) получается несколько иная величина, так как Милликен использовал уточнённую формулу для силы Стокса [4, §90, С.404].

Оригинал статьи учёного можно посмотреть здесь:

Millikan R. A. On the elementary electrical charge and the Avogadro constant. The Physical Review, 1913, Series II 2: 109–143. [Электронный ресурс]. URL: <https://history.aip.org/history/exhibits/gap/PDF/millikan.pdf>. (С.124).

В 1911 (или 1912) году аналогичные опыты проводил А. Ф. Иоффе с цинковыми пылинками. Здесь уже не учитывалось испарение капель. Величину элементарного заряда он не рассчитал. Но, проведя подобный



Рис. 2.

Millikan's Oil Drop apparatus, c. 1916.  
Exhibit in the Museum of Science and Industry,  
Chicago, Illinois, USA

опыт в 1925 году вместе с Н. И. Добронравовым<sup>3</sup>, несколько видоизменив опытную установку и использовав вместо цинка пылинки висмута, он подтвердил теорию фотоэффекта.

## 6. Описание установки

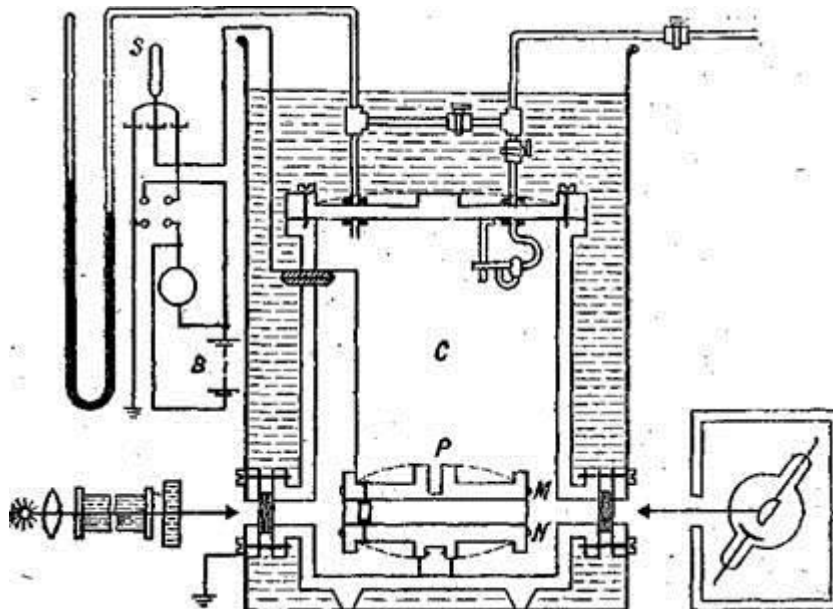


Рисунок 3. Схема установки Милликена

В камере *С* был помещён плоский конденсатор из круглых латунных пластин *М* и *Н* диаметром 22 см (расстояние между ними было 1,6 см).

В центре верхней пластины было сделано маленькое отверстие *р*, сквозь которое проходили капли масла. Последние образовывались при вдувании струи масла с помощью распылителя.

Воздух при этом предварительно очищался от пыли путём пропускания через трубу со стеклянной ватой. Капли масла имели диаметр порядка 1-5 мкм.

От аккумуляторной батареи *В* на пластины конденсатора подавалось напряжение порядка  $10^4$  В. С помощью переключателя можно было закорачивать пластины и этим разрушать электрическое поле.

Капли масла, попадавшие между пластинами *М* и *Н*, освещались сильным источником. Перпендикулярно направлению лучей через зрительную трубу наблюдалось поведение капель.

Ионы, необходимые для конденсации капель, создавались излучением кусочка радия массой 200 мг, расположенного на расстоянии от 3 до 10 см сбоку от пластин.

<sup>3</sup> Добронравов Николай Иванович (1891-1949) – советский физик. Родился в Петербурге. Окончил Петербургский ун-т (1915), где работал до 1919. С 1919 в ГРРИ, с 1921 — в ГФТРИ (с 1931 ЛФТИ), одновременно в ЛПИ (1920-1940), зав. кафедрой НИФИ ЛГУ (1935-1942), зав. кафедрой Высшего мореходного училища (1938-1942). В 1942-1949 мнс, затем снс РИАН. Работы в области физики твердого тела и физического приборостроения.

С помощью специального устройства опусканием поршня производилось расширение газа. Через 1-2 с после расширения радий удалялся или заслонялся свинцовым экраном. Затем включалось электрическое поле и начиналось наблюдение капель в зрительную трубу. Труба имела шкалу, по которой можно было отсчитывать путь, пройденный каплей за определённый промежуток времени. Время фиксировалось по точным часам с арретиром.

В процессе наблюдений Милликен обнаружил явление, послужившее ключом ко всей серии последующих точных измерений отдельных элементарных зарядов.

«Работая над взвешенными каплями,— пишет Милликен,— я несколько раз забывал закрывать их от лучей радия. Тогда мне случалось замечать, что время от времени одна из капель внезапно изменяла свой заряд и начинала двигаться вдоль поля или против него, очевидно, захватив в первом случае положительный, а во втором случае отрицательный ион. Это открывало возможность измерять с достоверностью не только заряды отдельных капель, как это я делал до тех пор, но и заряд отдельного атмосферного иона.

В самом деле, измеряя скорость одной и той же капли два раза, один раз до, а второй раз после захвата иона, я, очевидно, мог совершенно исключить свойства капли и свойства среды и оперировать с величиной, пропорциональной только заряду захваченного иона».

### Литература

1. Бобылев, Ю. В. Физики – творцы электромагнетизма / Ю. В. Бобылев, А. И. Грибков, В. А. Панин, Р. В. Романов, Г. В. Сидоров.– Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016.– 168 с. ISBN: 978-5-9909765-4-2.
2. Бобылев Ю. В. Механика. Курс лекций: учеб. пособие / Ю. В. Бобылев, А. И. Грибков, В. А. Панин, Р. В. Романов. - Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2014. – 300 с. ISBN 978-5-87954-873-0.
3. Бобылев Ю. В. Электричество и магнетизм: Курс лекций. Ч. 1. Электростатика / Ю. В. Бобылев, В. А. Панин, Р. В. Романов.– 2-е изд., испр. и доп. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016.– 140 с. ISBN: 978-5-87954-982-9.
4. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т.3. Электричество и магнетизм / М., Наука, 1983, 688 с.
5. Филонович С. Р. Судьба классического закона / М.: Наука, 1990, .240 с. (Библиотечка «КВАНТ»; вып. 79). [Электронный ресурс]. URL: <https://www.twirpx.com/file/449019/>. Стр.157-167
6. Шпольский Э.В. Атомная физика. Т. 1. Введение в атомную физику / М., Наука, 1974, 575 с. [Электронный ресурс]. URL: [http://www.ph4s.ru/books/ph\\_ob/atom/shpolsk1.rar](http://www.ph4s.ru/books/ph_ob/atom/shpolsk1.rar). §2-3, С12-18.

7. Опыты Милликена и Иоффе. Кинофрагмент, Школфильм, [Электронный ресурс]. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=xXnDwyxoyIc>.
8. Роджерс Эрик, Физика для любознательных. Том 3. Электричество и магнетизм. Атомы и ядра. / издание 2-е, исправленное, М.: Мир, 1973. 663 с. (С.276-280).

**Публикации авторов по материалам программы:**

1. Городько А. Б., Романов Р. В. Компьютерное моделирование опыта Милликена в курсе электромагнетизма // Материалы конференции профессорско-преподавательского состава ТГПУ им. Л. Н. Толстого 7-9 сентября 1995, тезисы докладов, Тула, Изд-во ТГПУ, 1996, С. 39-40. **Нет в РИНЦ.**
2. Киреев А. В. Романов Р. В. Интернет-ресурс – опыт Милликена // Проблемы учебного физического эксперимента”, выпуск 16, М.:ИОСО РАО, 2002, С. 76. <http://elibrary.ru/item.asp?id=23886424>.
3. Киреев А. В. Романов Р. В. Моделирование опыта Милликена // Компьютерные учебные программы и инновации, 2003, № 1, С. 38. <http://elibrary.ru/item.asp?id=24060091>.
4. М.: ВНИИЦ (Всероссийский научно-технический информационный центр), №50200200201, 2002.