

Колебания толстостенной сферы на тяжёлом стержне (нужно редактировать)

2. Формулировка задачи и уравнения

Толстостенная сфера закреплена на одном конце длинного стержня, другой конец которого закреплён на горизонтальной оси OZ , направленной к нам и может вращаться в вертикальной плоскости XOY без трения. Всё происходит в вязкой среде. Оба тела полностью погружены в среду. Стержень абсолютно твёрдый и не изгибается в процессе качания. На самом деле это не так при больших углах отклонения.

Параметры сферы: m – масса, внешний диаметр – d_2 , внутренний диаметр – d_1 ;

Параметры круглого в сечении стержня: масса M , длина L , диаметр D .

Параметры среды: ρ_0 – плотность среды, η – коэффициент динамической вязкости среды.

На сферу (шар) действуют силы:

$m\vec{g} = \rho_{ш} V_{ш} \vec{g}$ – сила тяжести, приложенная к центру сферы, где $\rho_{ш} = \frac{m}{V_{ш}}$ –

средняя плотность шара, $g = 9,814 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения; Масса измеряется уже с учётом отверстий под стержень. Стержень

небольшого диаметра, поэтому поправка небольшая. $V_{ш} = \frac{\pi d_2^3}{6}$ – внешний

объём шара;

$\vec{F}_{Аш} = -\rho_0 V_{ш} \vec{g}$ – сила Архимеда;

$\vec{N}_{ш}$ – сила реакции стержня, на рисунке не показана;

$\vec{F}_{ш1} = -3\pi\eta d_2 \vec{v}_{ш}$ – сила сопротивления среды по Стоксу (G. Stokes);

$\vec{F}_{ш2} = -c_{ш} \frac{\rho_0 S_{ш}}{2} v_{ш} \vec{v}_{ш}$ – сила аэродинамического (лобового) сопротивления

по Ньютону (I. Newton) [Путилов, с. 205]. $v_{ш}$ – линейная скорость центра шара. При условии, что по сечению скорость не меняется, а это не так!

Учёт последней силы актуален при сравнительно больших скоростях, когда сопротивление жидкости или газа обусловлено в основном затратой работы на образование вихрей. Только что называть большой скоростью? Эксперимент показывает, что именно эта сила играет основную роль.

Другие обозначения: $S_{ш} = \frac{\pi d_2^2}{4}$ – площадь проекции тела (шара) на

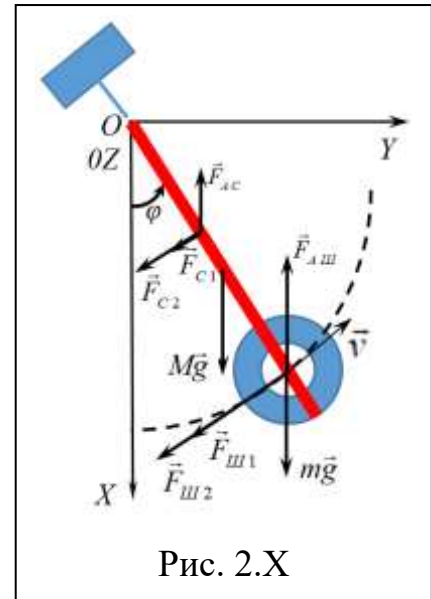


Рис. 2.X

плоскость, перпендикулярную к направлению движения (миделевое (от нидерл. Middel — средний, середина) сечение), $c_{ш}$ — коэффициент, различный для тел разных форм, называемый коэффициентом лобового сопротивления. В нашей задаче будет использовано значение для шара $c_{ш}=0,47$, если поверхность шероховатая. Если поверхность гладкая, то $c_{ш}=0,10$ ¹.

На стержень действуют силы:

$M\vec{g} = \rho_c V_c \vec{g}$ — сила тяжести, где $\rho_c = \frac{M}{V_c}$ — средняя плотность стержня,

$V_c = \frac{\pi D^2 L}{4}$ — объём стержня;

$\vec{F}_{AC} = -\rho_0 V_c \vec{g}$ — сила Архимеда. Так как стержень стальной, то мала по сравнению с силой тяжести, но оставил для симметрии записи;

\vec{N}_c — сила реакции шара, на рисунке не показана;

\vec{N} — сила реакции оси, на рисунке не показана;

\vec{F}_{mp} — сила трения в оси, на рисунке не показана, считаем малой;

$\vec{F}_{C1} = \mu_c \eta \vec{v}_c$ — сила сопротивления среды по Стоксу. Чему равен коэффициент, зависящий от геометрии, для цилиндра не знаю пока. Опыт показывает, что эта сила меньше, чем \vec{F}_{C2} , и, видимо, меньше, чем $\vec{F}_{ш1}$, так как диаметр стержня меньше диаметра сферы;

$\vec{F}_{C2} = -c_c \frac{\rho_0 S_c}{2} v_c \vec{v}_c$ — сила лобового сопротивления по Ньютону. Здесь v_c — линейная скорость средней точки части стержня между осью и верхней частью сферы. $S_c = DL$ — площадь поперечного сечения для стержня. Для круглого цилиндра, продуваемого перпендикулярно образующей при $L/D > 40$, коэффициент $c_c = 1,20$ ². Здесь также не учтено изменение линейной скорости вдоль стержня поперёк движения. Уточнение см. ниже.

Исходим из основного уравнения динамики вращательного движения тела вокруг оси и стандартных определений

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_{m\vec{g}} + \vec{M}_{\vec{F}_{AC}} + \vec{M}_{M\vec{g}} + \vec{M}_{\vec{F}_{AC}} + \vec{M}_{\vec{F}_{ш1}} + \vec{M}_{\vec{F}_{ш2}} + \vec{M}_{\vec{F}_{1C}} + \vec{M}_{\vec{F}_{2C}}. \quad (2.1)$$

¹ Коэффициент лобового сопротивления // [Электронный ресурс]. URL: https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.d5d50132-66bb2805-2c008ef8-74722d776562/https/en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient. (Дата обращения: 12.08.2024).

² Коэффициент лобового сопротивления кирпича. Много таблиц // [Электронный ресурс]. URL: <https://stroiteh-msk.ru/foto/koefficient-lobovogo-soprotivleniya-kirpicha.html>. (Дата обращения: 12.08.2024).

$$\frac{d\varphi}{dt} \vec{k} = \vec{\omega}, \quad \vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{l}], \quad \vec{M}_{\vec{F}} = [\vec{l}, \vec{F}].$$

где \vec{k} – единичный вектор вдоль оси OZ , $\vec{\omega}$ – угловая скорость, \vec{l} – радиус-вектор, проведённый от оси вращения в точку приложения силы, $\vec{M}_{\vec{F}}$ – момент соответствующей силы. Моменты всех сил реакции равны 0, из-за перпендикулярности силы и радиус-вектора $\vec{M}_{\vec{N}} = 0$, поэтому в (2.1) не указаны.

Момент инерции системы с учётом теоремы Штейнера равен

$$I = I_C + I_{0ш} + m_{ш} \left(L - \frac{d_2}{2} \right)^2. \quad (2.2)$$

По очевидным причинам следует ограничить диаметр шара $d_2 \leq L$.

Отдельно нужно написать момент силы \vec{F}_{C2} с учётом изменения линейной скорости вдоль стержня, где $l = y$ – расстояние от оси вращения до произвольного элемента стержня (см. ниже. Дополнения).

$$M_{\vec{F}_{C2}} = \frac{c_c \rho_0 D \omega_z^2 (L - d_2)^4}{2 \cdot 4} \quad (2.3)$$

Ещё можно добавить для смартфона

$$M_{\vec{F}_{cm-2}} = \frac{c_{cm} \rho_0 h \omega_z^2}{8} \left[\left(l_{cm} + \frac{b}{2} \right)^4 - \left(l_{cm} - \frac{b}{2} \right)^4 \right]. \quad (2.4)$$

Но эта величина мала.

Аналогично для момента силы $\vec{F}_{ш2}$ сферы (см. ниже. Дополнения).

$$M_{\vec{F}_{ш2}} = \frac{c_{ш} \rho_0}{2} \omega_z^2 \pi R^5 \left[\frac{3}{4} \left(\frac{L}{R} - 1 \right) + \left(\frac{L}{R} - 1 \right)^3 \right]. \quad (2.5)$$

Здесь $d_2 = 2R$, где R – внешний радиус сферы

Тогда уравнение (2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = & - \left[m \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{ш}} \right) (L - R) + M \left(\frac{L}{2} - \frac{\rho_0}{\rho_c} \left(\frac{L - d_2}{2} \right) \right) \right] g \sin \varphi \\ & - \eta \left[3\pi d_2 (L - R)^2 + \mu_c \left(\frac{L - d_2}{2} \right)^2 \right] \omega_z \\ & - \frac{\rho_0}{2} \left[c_{ш} \pi R^5 \left[\frac{3}{4} \left(\frac{L}{R} - 1 \right) + \left(\frac{L}{R} - 1 \right)^3 \right] + \frac{c_c D}{4} (L - d_2)^4 \right] |\omega_z| \omega_z \end{aligned}$$

Здесь ω_z – проекция угловой скорости. Если ввести дополнительные

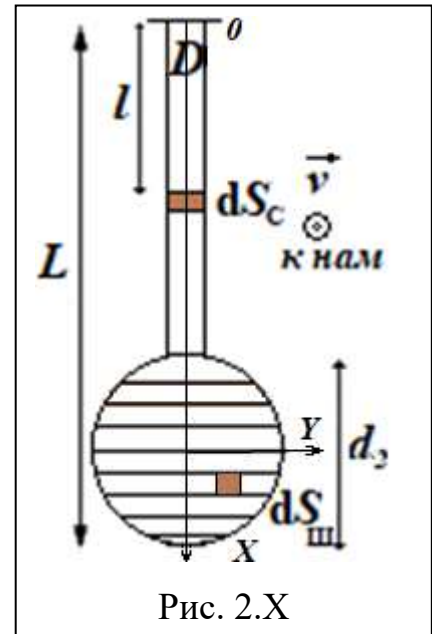


Рис. 2.X

обозначения:

$$2\delta = \frac{\eta}{I} \left[3\pi d_2 \left(L - \frac{d_2}{2} \right)^2 + \mu_c \left(\frac{L - d_2}{2} \right)^2 \right] \quad (2.3)$$

– декремент затухания,

$$\omega_0^2 = \frac{g}{I} \left[m \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{III}} \right) \left(L - \frac{d_2}{2} \right) + M \left(\frac{L}{2} - \frac{\rho_0}{\rho_c} \left(\frac{L - d_2}{2} \right) \right) \right], \quad \omega_0 = \sqrt{|\omega_0^2|} \quad (2.4)$$

– собственная циклическая частота колебаний (не путать с угловой скоростью), $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ – собственный период. Заметим, что величина ω_0^2

может быть как больше, так и меньше 0 (колебания снизу точки подвеса – обычные, и сверху от точки подвеса).

$$\frac{1}{\varphi_2} = \frac{\rho_0}{2I} \left[c_{III} \pi R^5 \left[\frac{3}{4} \left(\frac{L}{R} - 1 \right) + \left(\frac{L}{R} - 1 \right)^3 \right] + \frac{c_c D}{4} (L - d_2)^4 \right], \quad (2.5)$$

где φ_2 – угол при котором только под действием силы \vec{F}_2 скорость уменьшается в e раз.

В итоге получаем

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\delta \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{\varphi_2} \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (2.6)$$

То есть обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, однородное, с постоянными коэффициентами, нелинейное из-за синуса угла и квадрата угловой скорости. От обычного уравнения маятника оно отличается 3 слагаемым.

Или систему двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{d\omega_z}{dt} = -2\delta\omega_z - \frac{1}{\varphi_2} |\omega_z| \omega_z - \omega_0^2 \sin \varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega_z \end{cases}. \quad (5.2)$$

Решение этого уравнения с начальными условиями

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0, \quad \omega_z|_{t=0} = \omega_{z0}. \quad (6)$$

и будем рассматривать.