

## Мост Уитстона (Wheatstone Bridge)

Программа моделирует работу измерительного устройства, работающего по мостовой схеме. Это виртуальный аналог лабораторной работы №3 «Измерение сопротивлений мостовым методом» практикума по электричеству и магнетизму.

### 1. Общие сведения

Часто приходится рассчитывать достаточно сложные электрические цепи, которые нельзя упростить до последовательного или параллельного соединений.

Классическим примером таких цепей является мост Уитстона<sup>1</sup> (С. Wheatstone), показанный на рис. 1 и рис. 2. Здесь нет ни одной пары резисторов, соединённых последовательно или параллельно.

Для расчёта таких цепей могут помочь так называемые правила Кирхгофа (G. R. Kirchhoff).

В электротехнике часто используют метод контурных токов, который является следствием правил Кирхгофа и позволяет уменьшить число уравнений (см. Калашников, стр.552).

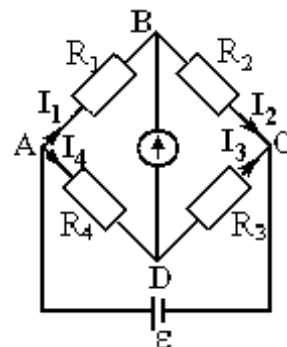


Рис.1

### 2. Система уравнений

Первое правило Кирхгофа.

для узла A:

$$I_0 = I_1 + I_4. \quad (2.1)$$

для узла B:

$$I_1 = I_2 + I_G. \quad (2.2)$$

для узла C:

$$I_0 = I_2 + I_3. \quad (2.3)$$

для узла D:

$$I_3 = I_4 + I_G. \quad (2.4)$$

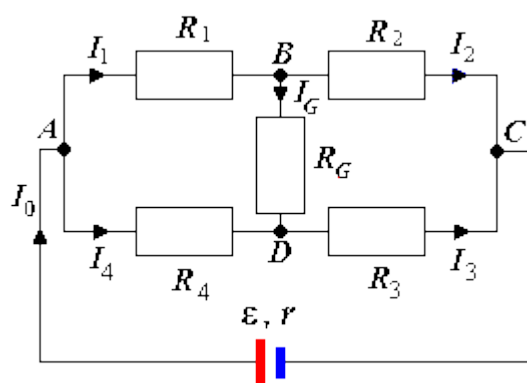


Рис.2

Одно из этих уравнений является следствием трёх других.

Второе правило Кирхгофа для трёх независимых контуров.

Для контура  $AR_1BR_GDR_4A$  (обход по часовой стрелке)

$$I_1R_1 + I_GR_G - I_4R_4 = 0. \quad (2.5)$$

Для контура  $BR_2CR_3DR_GB$  (обход по часовой стрелке)

$$I_2R_2 - I_3R_3 - I_GR_G = 0. \quad (2.6)$$

Для контура  $\varepsilon ABC\varepsilon$  (обход по часовой стрелке)

$$I_0r + I_1R_1 + I_2R_2 = \varepsilon. \quad (2.7)$$

<sup>1</sup> Уитстон Чарльз (Sir Charles Wheatstone) (06.02.1802-19.10.1875) — английский физик, автор многих изобретений, сэр. В 1843 г. предложил устройство для измерения сопротивления.

### 3. Сбалансированный режим

Если подобрать такие сопротивления, что ток через гальванометр не идёт ( $I_G = 0$ ), то

$$I_1 = I_2, I_3 = I_4, I_0 = I_1 + I_4 = I_2 + I_3.$$

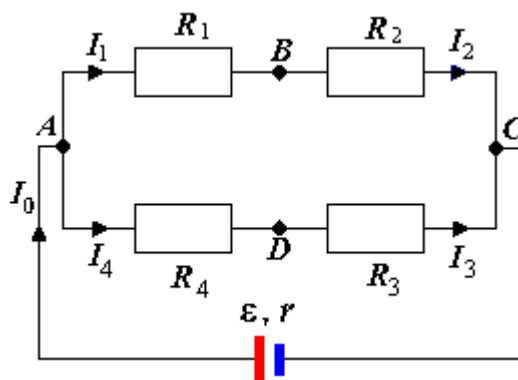
$$I_1 R_1 = I_4 R_4. \quad (3.5)$$

$$I_2 R_2 = I_3 R_3. \quad (3.6)$$

$$I_0 r + I_1 (R_1 + R_2) = \varepsilon. \quad (3.7)$$

Поделив (3.5) на (3.6) получим

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3}, \quad (3.8)$$



то есть известное условие равновесия моста.

Так как  $I_4 = I_1 \frac{R_1}{R_4}$ , то  $I_0 = I_1 + I_1 \frac{R_1}{R_4} = I_1 \left( 1 + \frac{R_1}{R_4} \right)$ ,  $I_1 = I_0 \frac{R_4}{R_1 + R_4}$ ,

$$I_0 \left( r + \frac{R_4 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_4} \right) = \varepsilon.$$

Откуда

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{r + \frac{R_4 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_4}}. \quad (3.9)$$

Из схемы на рис. 4 очевидно

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{\varepsilon}{r + \frac{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}} = \frac{\varepsilon}{r + \frac{\left( \frac{R_2 R_4}{R_1} + R_4 \right) (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + \frac{R_2 R_4}{R_1} + R_4}} = \frac{\varepsilon}{r + \frac{R_4 (R_2 + R_1) (R_1 + R_2)}{R_1^2 + R_1 R_2 + R_2 R_4 + R_1 R_4}} = \\ &= \frac{\varepsilon}{r + \frac{R_4 (R_2 + R_1) (R_1 + R_2)}{R_1^2 + R_1 R_2 + R_2 R_4 + R_1 R_4}} = \frac{\varepsilon}{r + \frac{R_4 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_4}} \end{aligned}$$

То есть аналог формулы (3.9) с учётом (3.8).

### 4. Общий случай

В общем случае система решается долго и громоздко методами линейной алгебры, как система из 6 линейных уравнений. В итоге получается

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{r + \frac{1}{R_1 + R_4} \left( (R_1 + R_2) R_4 - \frac{(R_2 R_4 - R_1 R_3) (R_1 R_G + R_2 (R_G + R_1 + R_4))}{R_G (R_2 + R_3) + (R_2 + R_3 + R_G) (R_1 + R_4)} \right)}. \quad (4.1)$$

Выражения для остальных токов определяются через  $I_0$  такими же

громоздкими формулами, поэтому приведём ещё только одно выражение для тока, текущего через гальванометр

$$I_G = I_0 \frac{R_2 R_4 - R_1 R_3}{R_G (R_2 + R_3) + (R_1 + R_4)(R_2 + R_3 + R_G)}, \quad (4.2)$$

Из (4.2) хорошо видно условие равенства тока через гальванометр.

#### Полезные ссылки:

1. Романов Р. В. Моделирование моста Уитстона // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020619395. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 17.08.2020. // Официальный бюллетень «Программы для ЭВМ. Базы данных. Топологии интегральных микросхем», 2020, №08, С. 1. [Электронный ресурс]. URL: [https://www1.fips.ru/wps/PA\\_FipsPub/res/BULLETIN/PrEVM/2020/08/20/INDEX.HTM](https://www1.fips.ru/wps/PA_FipsPub/res/BULLETIN/PrEVM/2020/08/20/INDEX.HTM).
2. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Учебное пособие: Для вузов. В 5 т. Т. III. Электричество. 4-е изд., стереот. – М.: Физматлит; Изд-во МФТИ, 2004. – 656 с. (на стр. 199 исходные уравнения. Расчёт только для сбалансированного режима, и то не полностью)
3. Грибков А. И., Нургулеев Д. А., Романов Р. В., Электричество и магнетизм. Лабораторный практикум. Учеб. пособие // Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2017. – 140 с. [Электронный ресурс]. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=32395750>.
4. Грибков А. И., Нургулеев Д. А., Романов Р. В., Лабораторная работа №3 «Измерение сопротивлений мостовым методом» [Электронный ресурс]. URL: [https://tsput.ru/res/fizika/9/e/lr\\_e\\_03.pdf](https://tsput.ru/res/fizika/9/e/lr_e_03.pdf).
5. Физики - творцы электромагнетизма: Иллюстрированный биограф. справочник [Электронный ресурс] / Авт.-сост.: Ю. В. Бобылёв, А. И. Грибков, В. А. Панин, Р. В. Романов, Г. В. Сидоров. – Электрон. дан. – Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2018. [Электронный ресурс]. URL: [https://tsput.ru/res/fizika/ELECTRO\\_DREAM/PERSONS/index.htm](https://tsput.ru/res/fizika/ELECTRO_DREAM/PERSONS/index.htm).