

7. Сложение колебаний взаимно перпендикулярных направлений с одинаковыми частотами

Пусть

$$x = A_1 \cos \omega t, \quad y = A_2 \cos(\omega t + \Delta\varphi).$$

Тогда $\cos \omega t = \frac{x}{A_1}$,

$$\frac{y}{A_2} = \cos \omega t \cos \Delta\varphi - \sin \omega t \sin \Delta\varphi,$$

$$\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1} \cos \Delta\varphi = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \Delta\varphi,$$

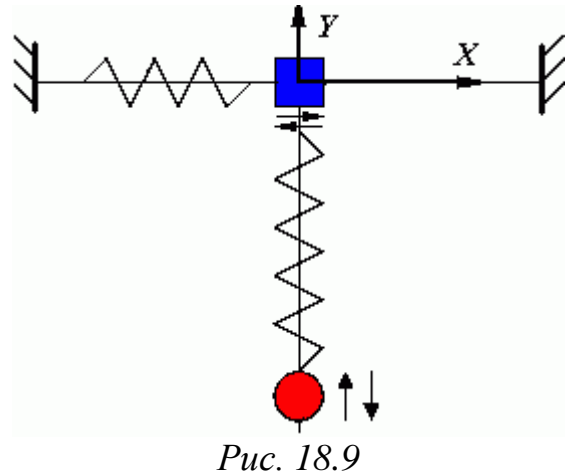
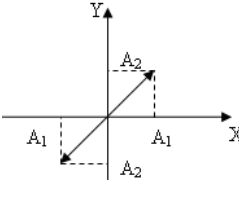
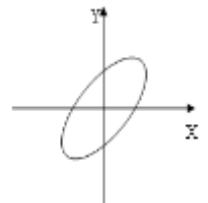
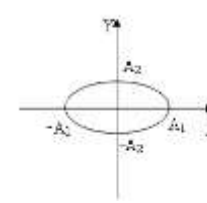
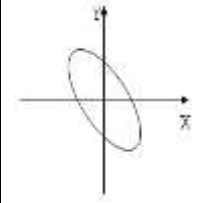
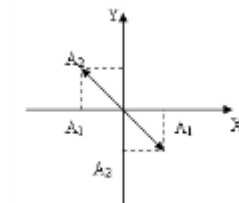


Рис. 18.9

$$\frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1 A_2} \cos \Delta\varphi + \frac{x^2}{A_1^2} \cos^2 \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi - \frac{x^2}{A_1^2} \sin^2 \Delta\varphi.$$

$$\frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1 A_2} \cos \Delta\varphi + \frac{x^2}{A_1^2} = \sin^2 \Delta\varphi.$$

Из курса аналитической геометрии известно, что в общем случае это уравнение эллипса с произвольно повернутыми осями.

$\Delta\varphi = 0$		$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$		$\Delta\varphi = \pi$
$\left(\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1}\right)^2 = 0$				$\left(\frac{y}{A_2} + \frac{x}{A_1}\right)^2 = 0$
$y = \frac{A_2}{A_1} x$		$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} = 1$		$y = -\frac{A_2}{A_1} x$
				

8. Сложение колебаний взаимно перпендикулярных направлений с частотами $\omega_y = 2\omega_x$

Пусть $x = A_1 \cos \omega t$, $y = A_2 \cos 2\omega t$. Из

тригонометрии известно, что $1 + \cos 2\omega t = 2\cos^2 \omega t$.

Тогда $y = A_2(2\cos^2 \omega t - 1) = A_2\left(2\frac{x^2}{A_1^2} - 1\right),$

$$y = \frac{2A_2}{A_1^2} x^2 - A_2, \quad \text{то есть уравнение параболы.}$$

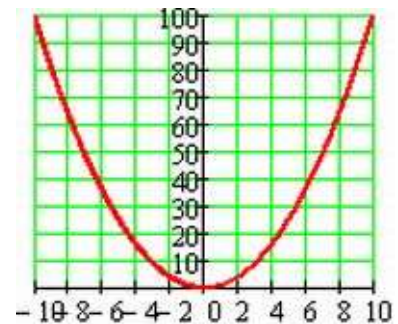


Рис. 18.10

9. Общий случай (для использования в программе)

Считаем, что трения нет, колебаний гармонические, причём строго вдоль направляющих.

горизонтальные	вертикальные
$x = C_1 \cos \omega_x t + C_2 \sin \omega_x t,$ $v_x = \omega_x (-C_1 \sin \omega_x t + C_2 \cos \omega_x t).$	$y = C_3 \cos \omega_y t + C_4 \sin \omega_y t,$ $v_y = \omega_y (-C_3 \sin \omega_y t + C_4 \cos \omega_y t).$
Произвольные начальные условия	
$x _{t=0} = x_0, \quad v_x _{t=0} = v_{0x}.$	$y _{t=0} = y_0, \quad v_y _{t=0} = v_{0y}.$
$x_0 = C_1,$ $v_{0x} = \omega_x C_2.$	$y_0 = C_3,$ $v_{0y} = \omega_y C_4.$
Виды решения	
$x = x_0 \cos \omega_x t + \frac{v_{0x}}{\omega_x} \sin \omega_x t.$	$y = y_0 \cos \omega_y t + \frac{v_{0y}}{\omega_y} \sin \omega_y t,$
$x = A_x \cos(\omega_x t - \varphi_x), \quad \text{где}$ $A_x = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{0x}}{\omega_x}\right)^2}, \quad \varphi_x = \arctg \frac{v_{0x}}{\omega_x x_0}.$	$y = A_y \cos(\omega_y t - \varphi_y), \quad \text{где}$ $A_y = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_{0y}}{\omega_y}\right)^2}, \quad \varphi_y = \arctg \frac{v_{0y}}{\omega_y y_0}.$

Сдвиг фаз

$$\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x = \arctg \frac{v_{0y}}{\omega_y y_0} - \arctg \frac{v_{0x}}{\omega_x x_0}.$$

Это и моделируется в представленной программе с небольшими упрощениями.

Используется безразмерное время $\tau = \omega_x t$, и отношение частот $\omega = \frac{\omega_y}{\omega_x}$. Причём

удобнее такой вид решения

$x = x_0 \cos \tau + \frac{v_{0x}}{\omega_x} \sin \tau$	$y = y_0 \cos \omega \tau + \frac{v_{0y}}{\omega_y} \sin \omega \tau$
---	---

Это связано с тем, что тангенс – функция периодическая и разрывная.

Порядок величин не имеет значения, поэтому выбираются удобные для построения графиков параметры.