

Моделирование процессов в колебательном контуре с источником ЭДС

1. Уравнение колебаний

Рассмотрим колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности L , конденсатора C , сопротивления R , в цепь которого включен источник постоянной или переменной ЭДС (рис.1).

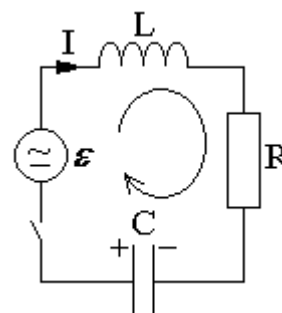


Рис. 1

Считая токи квазистационарными, а параметры контура сосредоточенными, применим второе правило Кирхгофа, закон самоиндукции и связи между силой тока и зарядом, зарядом и напряжением на конденсаторе

$$IR = U + \varepsilon + \varepsilon_{si}, \quad \varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt}, \quad I = \frac{dq}{dt} = -\frac{dq_c}{dt} = -C \frac{dU}{dt}, \quad U = \frac{q_c}{C}.$$

Здесь I – сила тока в цепи, q – заряд, протекающий по цепи, q_c – заряд конденсатора, U_c – напряжение на конденсаторе, ε_{si} – ЭДС самоиндукции, ε – ЭДС внешнего источника, которую будем записывать как $\varepsilon = \varepsilon_m \cos \omega t$, где ω – частота колебаний тока в источнике ЭДС. Если $\omega = 0$, то ЭДС источника становится постоянной.

В итоге получаем

$$-RC \frac{dU_c}{dt} = U_c + \varepsilon + LC \frac{d^2 U_c}{dt^2}, \text{ или } LC \frac{d^2 U_c}{dt^2} + RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = -\varepsilon_m \cos \omega t. \quad (1.3)$$

Расчёт с полным набором элементов есть в программе и справке 1. Там же можно сделать $R=0$.

2. Резистор в цепи переменного или постоянного тока ($L=0$ и $C=0$)

Имеется в виду, что в цепи нет конденсатора и катушки. Для конденсатора такое обозначение не вполне удачно, так как при этом ёмкостное сопротивление $X_c = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \infty$, то есть цепь разомкнута.

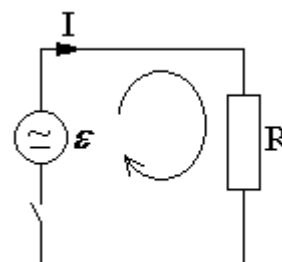


Рис. 2

$$U_R = IR = \varepsilon_m \cos \omega t.$$

$$I = \frac{\varepsilon_m}{R} \cos \omega t.$$

Ток возникает мгновенно, так как нет катушки, и нечем замедлить его нарастание.

Мощность, выделяющаяся на резисторе

$$P_R(t) = UI = \frac{\varepsilon_m^2}{R} \cos^2 \omega t.$$

Энергия – это количество теплоты, выделяющееся в проводнике за время.

$$W_R(t) = \int_0^t P_R dt = \frac{\varepsilon_m^2}{R} \int_0^t \cos^2 \omega t dt = \frac{\varepsilon_m^2}{2R} \int_0^t (1 + \cos 2\omega t) dt = \frac{\varepsilon_m^2}{2R} \left(t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t) \right) \Big|_0^t =$$

$$= \frac{\varepsilon_m^2}{2R} \left(t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t) \right) = \frac{\varepsilon_m^2}{2R} \left(t + \frac{1}{2\omega} \sin\left(\frac{4\pi}{T} t\right) \right)$$

$$W_R(t) = \frac{\varepsilon_m^2}{2R} \left(t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t) \right).$$

Если ток постоянный, то используя первый замечательный предел, имеем

$$W_R(t) = \frac{\varepsilon_m^2}{R} t.$$

Отношение энергий при постоянном и переменном токе

$$\frac{W_{nep}(t)}{W_{ном}(t)} = \frac{\frac{\varepsilon_m^2}{2R} \left(t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t) \right)}{\frac{\varepsilon_m^2}{R} t} = \frac{1}{2} \frac{t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t)}{t} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega t} \right)$$

Среднее отношение энергий за период

$$\left\langle \frac{W_{nep}(t)}{W_{ном}(t)} \right\rangle = \frac{1}{2}.$$

2.1. Обезразмеривание

В безразмерных переменных: $\tau = \omega t$ – время, $u_R = \frac{U_R}{U_{ном}}$ –

напряжение на резисторе, $U_{ном} = |\varepsilon_m|$

$$u_R = \text{sign}(\varepsilon_m) \cos \tau.$$

$$i(\tau) = \frac{I}{I_{ном}} = \frac{\varepsilon_m}{RI_{ном}} \cos \omega t = \frac{\varepsilon_m}{RI_{ном}} \cos \tau = \text{sign}(\varepsilon_m) \cos \tau = u(\tau), \text{ если } I_{ном} = \frac{U_{ном}}{R}.$$

Если обозначить

$$w_R(\tau) = \frac{W(t)}{W_{ном}}, \quad W_{ном} = \frac{\varepsilon_m^2}{2R\omega},$$

$\omega \neq 0$ – переменный ток	$\omega = 0$ – постоянный ток
$u_R(\tau) = \text{sign}(\varepsilon_m) \cos \tau$	$u_R(\tau) = \text{sign}(\varepsilon_m)$
$i(\tau) = \text{sign}(\varepsilon_m) \cos \tau$	$i(\tau) = \text{sign}(\varepsilon_m)$
$w_R(\tau) = \tau + \frac{1}{2} \sin(2\tau)$	$w_R(t) = t, \quad w_R(t) = \frac{W_R(t)}{P_{ном}}, \quad P_{ном} = \frac{\varepsilon_m^2}{R}$
$U_{ном} = \varepsilon_m , \quad I_{ном} = \frac{U_{ном}}{R}, \quad W_{ном} = \frac{\varepsilon_m^2}{2R\omega}$	Здесь нет характерного масштаба времени. В программе время в секундах.