

Моделирование процессов в колебательном контуре с источником ЭДС

1.1. Уравнение колебаний

Рассмотрим колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности L без сопротивления, конденсатора C , сопротивления R , в цепь которого включен источник постоянной или переменной ЭДС ε без внутреннего сопротивления (рис.1).

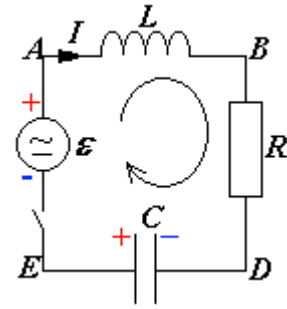


Рис. 1

Считая токи квазистационарными, а параметры контура сосредоточенными, применим второе правило Кирхгофа, обходя контур по часовой стрелке, закон самоиндукции и связи между силой тока и зарядом, зарядом и напряжением на конденсаторе

$$IR = U_C + \varepsilon + \varepsilon_{si}, \quad (1.1)$$

$$U_C = \frac{q_C}{C}, \quad I = \frac{dq}{dt} = -\frac{dq_C}{dt} = -C \frac{dU_C}{dt}, \quad \varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt} = LC \frac{d^2 U_C}{dt^2}.$$

Здесь I – сила тока в цепи, q – заряд, протекающий по цепи, q_C – заряд конденсатора, U_C – напряжение на конденсаторе, ε_{si} – ЭДС самоиндукции, ε – ЭДС внешнего источника, которую будем записывать как $\varepsilon = \varepsilon_m \cos \omega t$, где ω – циклическая частота колебаний ЭДС. Если $\omega = 0$, то ЭДС источника становится постоянной.

После подстановки получаем

$$-RC \frac{dU_C}{dt} = U_C + \varepsilon_m \cos \omega t + LC \frac{d^2 U_C}{dt^2}, \quad (1.3)$$

Если обозначить δ – декремент затухания, ω_0 – собственная частота, T_0 – собственный период колебаний в контуре (формула Томсона)

$$2\delta = \frac{R}{L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}, \quad 2\delta = RC\omega_0^2$$

то получим

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{2\delta}{\omega_0^2} \frac{dU_C}{dt} + U_C = -\varepsilon_m \cos \omega t, \quad I = -C \frac{dU_C}{dt}. \quad (1.5)$$

– обыкновенное дифференциальное линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

1.2. Другой способ получения уравнения колебаний

Очевидно, что в замкнутом контуре (см. рис. 1)

$$(\varphi_A - \varphi_B) + (\varphi_B - \varphi_D) + (\varphi_D - \varphi_E) + (\varphi_E - \varphi_A) = 0. \quad (1.2.1)$$

Используем закон Ома для участка цепи

$$U_{12} = I_{12} R_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}. \quad (1.2.2)$$

Напряжение на источнике (r – внутреннее сопротивление источника)

$$U_r = Ir = \varphi_E - \varphi_A + \varepsilon_m \cos \omega t, \quad \varphi_E - \varphi_A = U_r - \varepsilon_m \cos \omega t.$$

Напряжение на резисторе

$$U_R = IR = \varphi_B - \varphi_D.$$

Напряжение на катушке (R_L – сопротивление провода катушки)

$$U_L = IR_L = \varphi_A - \varphi_B - L \frac{dI}{dt}, \quad \varphi_A - \varphi_B = U_L + L \frac{dI}{dt}.$$

Напряжение на конденсаторе $U_C^* = \varphi_D - \varphi_E$.

Тогда получаем

$$U_L + L \frac{dI}{dt} + U_R + U_C^* + U_r - \varepsilon_m \cos \omega t = 0,$$

или

$$U_L + U_R + U_r + U_C^* = \varepsilon_m \cos \omega t - L \frac{dI}{dt}, \quad (1.2.3)$$

то есть сумма напряжений равна сумме ЭДС, что вполне логично.

В явном виде:

$$L \frac{dI}{dt} + I(R + r + R_L) + U_C^* - \varepsilon_m \cos \omega t = 0.$$

Здесь уже ток $I = C \frac{dU_C^*}{dt}$. Тогда

$$LC \frac{d^2 U_C^*}{dt^2} + (R + r + R_L) C \frac{dU_C^*}{dt} + U_C^* = \varepsilon_m \cos \omega t. \quad (1.2.4)$$

Будем считать, что источник без внутреннего сопротивления ($r=0$) и у катушки тоже $R_L=0$. Тогда используя те же обозначения, имеем

$$\frac{d^2 U_C^*}{dt^2} + 2\delta \frac{dU_C^*}{dt} + \omega_0^2 U_C^* = \omega_0^2 \varepsilon_m \cos \omega t, \quad I = C \frac{dU_C^*}{dt}, \quad (1.2.5)$$

в точности совпадающее с (1.5).

Разница заключается в трактовке знака напряжения на конденсаторе. Если речь идёт о колебательном контуре, то источник можно выключать (это внешняя сила) и тогда используем U_C . Если же рассматриваем цепь переменного тока, то тогда источник является причиной процесса и $U_C^* = -U_C$.

При условиях ($r = 0, R_L = 0$) уравнение (1.2.3) запишется как

$$U_R + U_C^* = \varepsilon_m \cos \omega t + \varepsilon_L, \quad \text{где } \varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt} \quad (1.2.6)$$

– ЭДС самоиндукции в катушке.

Тогда

$$\varepsilon_L = U_R + U_C^* - \varepsilon_m \cos \omega t, \quad \varepsilon_L = U_R - U_C - \varepsilon_m \cos \omega t \quad (1.2.7)$$

или

$$\varepsilon_L = U_R - U_C - \varepsilon_m \cos \omega t, \quad (1.2.8)$$

Для идеального колебательного контура, который обычно рассматривается (рис. 2)

$$\varepsilon_L = -U_C = \varphi_{BD} - \varphi_{AE}, \quad (1.2.9)$$

То есть разные знаки. Это можно использовать для проверки программы.

Частный случай. Источник, катушка, конденсатор

$$Ir = U_C - L \frac{dI}{dt} = \varepsilon_m \cos \omega t$$

$$0 = \frac{Q}{C} - L \frac{dI}{dt} + \varepsilon_m \cos \omega t$$

Если проводить аналогию с механикой, то уравнение (1.5) с точностью до обозначений совпадает с уравнением, описывающим затухающие колебания груза на пружине с внешней силой.

Эти уравнения и моделируются в Mathcad сравнением численного решения дифференциального уравнения методом Рунге-Кутты и аналитического решения. В Windows-приложении используется только аналитическое решение.

Для проверки правильности расчета в программе можно сравнить максимальные значения.

$$\frac{|\varepsilon_{L \max}|}{|U_{C \max}|} = \frac{I_{\max} X_L}{I_{\max} X_C} = \frac{X_L}{X_C} = \frac{L\omega}{\frac{1}{\omega C}} = LC\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2,$$

То есть, если частота источника больше собственной, то больше ЭДС, и наоборот.

2. Процедура обезразмеривания

Параметры реальных конденсаторов и катушек индуктивности, как правило, таковы, что периоды и частоты неудобны для наблюдения.

Введём безразмерные переменные и параметры: $\tau = \omega_0 t$ – время,

$\alpha = \frac{\delta}{\omega_0}$ – декремент затухания, $\beta = \frac{\omega}{\omega_0}$ – отношение частоты вынуждающей

силы к собственной частоте контура, $u = \frac{U_C}{U_{\text{ном}}}$ – напряжение на

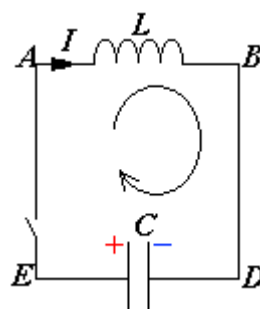


Рис. 2

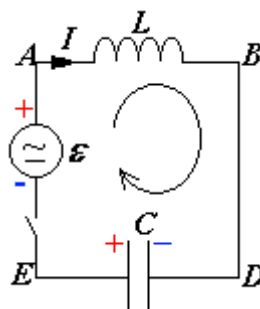


Рис. 3

конденсаторе, $E_m = \frac{\varepsilon_m}{U_{norm}}$ – ЭДС источника, где $U_{norm} = \begin{cases} |U_0|, & \text{если } U_0 \neq 0 \\ |\varepsilon_m|, & \text{если } U_0 = 0 \end{cases}$.

$i = \frac{I}{I_{norm}}$ – сила тока, а нормировка тока $I_{norm} = C\omega_0 U_{norm} = \frac{U_{norm}}{X_C}$. В этом случае безразмерный собственный период $\theta_0 = 2\pi$, а уравнение (1.4) запишется как

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + 2\alpha \frac{du}{d\tau} + u = -E_m \cos \beta\tau, \quad i = -\frac{du}{d\tau}. \quad (2.1)$$

Для программирования:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = -i \\ \frac{di}{d\tau} = -2\alpha i + u + E_m \cos \beta\tau \end{cases}.$$

2.2. Напряжение на резисторе

$$U_R = IR.$$

В безразмерном виде

$$u_R = \frac{U_R}{U_{norm}} = \frac{i I_{norm} R}{U_{norm}} = \frac{i C \omega_0 U_{norm} R}{U_{norm}} = C \omega_0 R i = \frac{R}{X_C} i.$$

То есть безразмерное напряжение на резисторе

$$u_R = k_R i, \quad \text{где } k_R = C \omega_0 R = \frac{R}{X_C}.$$

2.3. Напряжение на катушке

$$\varepsilon_L = U_R - U_C - \varepsilon_m \cos \omega t$$

$$u_L = \frac{\varepsilon_L}{U_{norm}} = -\frac{\varepsilon_m}{U_{norm}} \cos \beta\tau - \frac{U_C}{U_{norm}} + \frac{U_R}{U_{norm}} = -\frac{\varepsilon_m}{U_{norm}} \cos \beta\tau - u_c + u_R.$$

3. Начальные условия

Для рассмотрения процессов в колебательном контуре, где источник является внешней силой и его можно исключить, удобно считать конденсатор изначально заряженным до напряжения U_0 (обладает зарядом q_0), а тока в цепи нет.

$$U|_{t=0} = U_0, \quad I|_{t=0} = -C \frac{dU}{dt} \Big|_{t=0} = 0. \quad (3.1)$$

Если же рассматривать эту задачу как протекание переменного тока по цепи с набором линейных элементов, то удобнее полагать, что источник есть всегда, а конденсатор исходно разряжен.

$$U|_{t=0} = 0, \quad \frac{dU}{dt} \Big|_{t=0} = 0. \quad (3.2)$$

В безразмерном виде эти условия имеют вид:

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (3.3)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (3.4)$$

4. Энергетика электрической цепи

Полная энергия колебательного контура (энергия конденсатора и катушки?) всегда положительна

$$W = \frac{1}{2}(CU^2 + LI^2). \quad (4.1)$$

Используя безразмерные величины, получаем

$$W = \frac{1}{2}(CU_{norm}^2 u^2 + LC^2 \omega_o^2 U_{norm}^2 i^2) = \frac{CU_{norm}^2}{2}(u^2 + i^2).$$

Если обозначить $W_{norm} = \frac{CU_{norm}^2}{2}$, то безразмерная энергия $w = \frac{W}{W_{norm}}$ равна

$$w = u^2 + i^2. \quad (4.2)$$

А работа тока чему равна?

5. О частном решении

Полное решение неоднородного уравнения складывается из полного решения однородного $u^0(\tau)$ и частного решения неоднородного $u^*(\tau)$.

Частное решение ищем в виде

$$u^*(\tau) = C_1 \cos \beta \tau + C_2 \sin \beta \tau. \quad (5.1)$$

Это решение следует подставить в (2.1) и приравнять коэффициенты при гармонических функциях, так как уравнение должно выполняться в любой момент времени.

$$\begin{cases} -C_1 \beta^2 + 2\alpha \beta C_2 + C_1 = -E_m, \\ -C_2 \beta^2 - 2\alpha \beta C_1 + C_2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} C_1(1 - \beta^2) + 2\alpha \beta C_2 = -E_m, \\ C_2(1 - \beta^2) - 2\alpha \beta C_1 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} C_1 = -E_m \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2}, \\ C_2 = -E_m \frac{2\alpha \beta}{(1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2} \end{cases}.$$

Это решение может быть свёрнуто к более компактному виду.

$$u^*(\tau) = -\frac{E_m}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2}} \left(\frac{1 - \beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2}} \cos \beta \tau + \frac{2\alpha \beta}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2}} \sin \beta \tau \right).$$

Если считать

$$\cos \varphi^* = \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2}}, \quad \sin \varphi^* = \frac{2\alpha \beta}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2}},$$

то

$$u^*(t) = -A \cos(\beta \tau - \varphi^*), \quad (5.5)$$

где амплитуда и фаза

$$A = \frac{E_m}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2}}, \quad \varphi^* = \arctg\left(\frac{2\alpha \beta}{1 - \beta^2}\right) = \arctg\left(\frac{C_2}{C_1}\right), \quad (5.6)$$

то есть гармонические колебания с частотой вынуждающей силы.

Однако применять эту форму решения нужно аккуратно, так как

$\omega > \omega_0, \quad \beta > 1$	$\omega < \omega_0, \quad \beta < 1$
$C_1 < 0, \quad \cos \varphi^* < 0$	$C_1 > 0, \quad \cos \varphi^* > 0$
$C_2 > 0, \quad \sin \varphi^* > 0$	$C_2 > 0, \quad \sin \varphi^* > 0$
$\operatorname{tg} \varphi^* = \frac{C_2}{C_1} < 0, \quad \frac{\pi}{2} < \varphi^* < \pi,$ – 2 квадрант	$\operatorname{tg} \varphi^* = \frac{C_2}{C_1} > 0, \quad 0 < \varphi^* < \frac{\pi}{2}$ – 1 квадрант

Кроме того, при $\delta = 0, \alpha = 0, C_2 = 0, \varphi^* = 0$, а амплитуда

$$C_1 = -\frac{E_m}{1 - \beta^2},$$

то есть меняет знак, в зависимости от соотношения между частотами β .

6. Аналитическое решение

Так как полное решение однородного уравнения имеет три разные формы в зависимости от соотношения между декрементом и собственной частотой, то и полное решение также будет иметь три формы. Кроме того, возможны и гармонические колебания.

6.1. Гармонические колебания под действием внешней вынуждающей силы

Пусть декремент $\delta = 0$, $\alpha = 0$.

Уравнение гармонических колебаний под действием внешней вынуждающей силы будет иметь вид

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + u = -E_m \cos \beta\tau, \quad i = -\frac{du}{d\tau}. \quad (6.1.1)$$

6.1.1. Начальные условия (3.3)

Решение ищем в виде

$$u(\tau) = C_3 \sin \tau + C_4 \cos \tau + C_1 \cos \beta\tau, \quad C_1 = -\frac{E_m}{1 - \beta^2},$$

$$i(\tau) = -\frac{du}{d\tau} = -C_3 \cos \tau + C_4 \sin \tau + C_1 \beta \sin \beta\tau.$$

При подстановке начальных условий

$$\begin{cases} u_0 = C_4 + C_1 \\ 0 = -C_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} C_4 = u_0 - C_1 \\ C_3 = 0 \end{cases}.$$

окончательное решение в развёрнутом виде

$$u(\tau) = C_4 \cos \tau + C_1 \cos \beta\tau = (u_0 - C_1) \cos \tau + C_1 \cos \beta\tau,$$

$$i(\tau) = C_4 \sin \tau + C_1 \beta \sin \beta\tau = (u_0 - C_1) \sin \tau + C_1 \beta \sin \beta\tau.$$

окончательное решение в свёрнутом виде

$$u(\tau) = u_0 \cos \tau - \frac{E_m}{1 - \beta^2} (\cos \beta\tau - \cos \tau) = u_0 \cos \tau + \frac{2E_m}{1 - \beta^2} \sin \frac{(\beta - 1)\tau}{2} \sin \frac{(\beta + 1)\tau}{2}.$$

$$i(\tau) = u_0 \sin \tau - \frac{E_m}{1 - \beta^2} (\beta \sin \beta\tau - \sin \tau).$$

6.1.1.1 Резонанс без сопротивления $\delta = 0$, $\alpha = 0$, $\beta \rightarrow 1$

При стремлении $\beta \rightarrow 1$, то есть при точном резонансе, используя первый замечательный предел, получаем

$$u(\tau) = u_0 \cos \tau - \frac{E_m \tau}{(1 + \beta)} \left(\frac{1}{\frac{(\beta - 1)\tau}{2}} \sin \frac{(\beta - 1)\tau}{2} \right) \sin \frac{(\beta + 1)\tau}{2}$$

$$u(\tau) = u_0 \cos \tau - \frac{E_m \tau}{2} \sin \tau = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{E_m \tau}{2}\right)^2} \cos(\tau + \varphi_r), \quad \operatorname{tg} \varphi_r = \frac{E_m \tau}{2u_0}.$$

$$i(\tau) = u_0 \sin \tau + \frac{E_m \tau}{2} \cos \tau = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{E_m \tau}{2}\right)^2} \sin(\tau + \varphi_r).$$

Напряжение максимально, когда ток равен нулю.

$$u_0 \sin \tau_1 + \frac{E_m \tau_1}{2} \cos \tau_1 = 0, \quad \operatorname{tg} \tau_1 = -\frac{E_m \tau_1}{2u_0}, \quad \tau_1 = -\frac{2u_0}{E_m} \operatorname{tg} \tau_1$$

Это уравнение аналитически не решается!

Тогда

$$u_{\max} = u(\tau_1) = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{E_m \tau_1}{2}\right)^2} = \sqrt{u_0^2 + (u_0 \operatorname{tg} \tau_1)^2} = u_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \tau_1} =$$

$$= \frac{u_0}{|\cos \tau_1|}$$

Если попробовать поискать среднеквадратичное значение за период

Часто говорят, что амплитуда при резонансе без затухания бесконечна. На самом деле, она будет достигнута только через бесконечное время.

Если частоты не сильно отличаются друг от друга

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_0 + \Delta\omega}{\omega_0} = 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 1 + \Delta\beta, \quad \text{где } \Delta\beta \ll 1, \text{ то}$$

$$u(\tau) = u_0 \cos \tau + \frac{2E_m}{1 - (1 + \Delta\beta)^2} \sin \frac{\Delta\beta \tau}{2} \sin \frac{(2 + \Delta\beta)\tau}{2},$$

$$u(\tau) \approx u_0 \cos \tau - \frac{E_m}{\Delta\beta} \sin \frac{\Delta\beta \tau}{2} \sin \tau = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{E_m}{\Delta\beta} \sin \frac{\Delta\beta \tau}{2}\right)^2} \cos(\tau + \varphi_b).$$

То есть колебания с собственной частотой, но большой и медленно меняющейся амплитудой (биения). Полный период биений при этом

$$\tau_b = \frac{2}{\Delta\beta} 2\pi = \frac{2}{\Delta\beta} \theta_0.$$

6.1.2. Начальные условия (3.4)

При начальных условиях (3.4)

$$u(\tau) = -\frac{E_m}{1-\beta^2}(\cos \beta\tau - \cos \tau) = \frac{2E_m}{1-\beta^2} \sin \frac{(\beta-1)\tau}{2} \sin \frac{(\beta+1)\tau}{2}.$$

$$i(\tau) = -\frac{E_m}{1-\beta^2}(\beta \sin \beta\tau - \sin \tau).$$

При этих условиях полная энергия ограничена

$$w(\tau) = \left(\frac{E_m}{1-\beta^2} \right)^2 \left((\cos \beta\tau - \cos \tau)^2 + (\beta \sin \beta\tau - \sin \tau)^2 \right)$$

6.1.3. Источник с постоянной ЭДС ($\beta = 0$)

$$u(\tau) = u_0 \cos \tau - E_m(1 - \cos \tau) = u_0 \cos \tau - 2E_m \sin^2 \frac{\tau}{2} = (u_0 + E_m) \cos \tau - E_m,$$

$$i(\tau) = (u_0 + E_m) \sin \tau,$$

Предельные значения

$$u_{\max 1} = |u_0| \text{ при } \tau_m = 0; 2\pi, \quad u_{\max 2} = |u_0 + 2E_m| \text{ при } \tau_m = \pi; 3\pi,$$

$$i_{\max} = |u_0 + E_m| \text{ при } \tau_m = \frac{\pi}{2}, \quad i_{\min} = -|u_0 + E_m| = -i_{\max} \text{ при } \tau_m = \frac{3\pi}{2},$$

6.2. Слабое затухание под действием внешней вынуждающей силы

Пусть декремент меньше собственной частоты $\delta < \omega_0$, $\alpha < 1$.

Колебания происходят с частотой $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, $\gamma = \frac{\Omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - \alpha^2}$, а

период увеличивается по сравнению с собственным.

Решение ищем в виде

$$u(\tau) = e^{-\alpha\tau} (C_3 \sin \gamma\tau + C_4 \cos \gamma\tau) + C_1 \cos \beta\tau + C_2 \sin \beta\tau,$$

$$i(\tau) = -\frac{du}{d\tau} = -e^{-\alpha\tau} (-\alpha(C_3 \sin \gamma\tau + C_4 \cos \gamma\tau) + \gamma(C_3 \cos \gamma\tau - C_4 \sin \gamma\tau)) - \beta(-C_1 \sin \beta\tau + C_2 \cos \beta\tau),$$

или

$$i(\tau) = e^{-\alpha\tau} ((\alpha C_3 + \gamma C_4) \sin \gamma\tau + (\alpha C_4 - \gamma C_3) \cos \gamma\tau) + \beta(C_1 \sin \beta\tau - C_2 \cos \beta\tau).$$

При подстановке начальных условий

$$\begin{cases} u_0 = C_4 + C_1 \\ 0 = \alpha C_4 - \gamma C_3 - \beta C_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} C_4 = u_0 - C_1 \\ C_3 = \frac{\alpha C_4 - \beta C_2}{\gamma} = \frac{\alpha(u_0 - C_1) - \beta C_2}{\gamma} \end{cases}.$$

окончательное решение в свернутом виде

$$u(\tau) = A_0 e^{-\alpha\tau} \cos(\gamma\tau - \varphi_0) - A \cos(\beta\tau - \varphi^*),$$

$$A = \frac{E_m}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2}}, \quad \varphi^* = \arctg\left(\frac{2\alpha\beta}{1 - \beta^2}\right),$$

$$A_0 = \sqrt{C_3^2 + C_4^2}, \quad \varphi_0 = \arctg\left(\frac{C_3}{C_4}\right),$$

Надо доделать???

6.3. Критический режим под действием внешней вынуждающей силы

Пусть декремент равен собственной частоте $\delta = \omega_0$, $\alpha = 1$.

Частота $\Omega = 0$ становится нулевой, а период бесконечным, то есть собственные колебания прекращаются.

Решение ищем в виде

$$u(\tau) = e^{-\tau} (C_3 \tau + C_4) + C_1 \cos \beta\tau + C_2 \sin \beta\tau,$$

$$i(\tau) = e^{-\tau} (C_3 \tau + C_4 - C_3) + C_1 \beta \sin \beta\tau - C_2 \beta \cos \beta\tau.$$

При подстановке начальных условий

$$\begin{cases} u_0 = C_4 + C_1 \\ 0 = C_4 - C_3 - \beta C_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} C_4 = u_0 - C_1 \\ C_3 = u_0 - C_1 - \beta C_2 \end{cases}.$$

В свернутом виде

$$u(\tau) = e^{-\tau} ((u_0 - C_1 - \beta C_2) \tau + u_0 - C_1) + A \cos(\beta\tau - \varphi^*),$$

$$i(\tau) = e^{-\tau} (C_3 \tau + \beta C_2) + C_1 \beta \sin \beta\tau - C_2 \beta \cos \beta\tau.$$

6.4. Сильное затухание под действием внешней вынуждающей силы

Здесь декремент больше собственной частоты $\delta > \omega_0$, $\alpha > 1$.

Колебаний уже нет, но всё равно используется величина

$$\Omega = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad \gamma = \frac{\Omega}{\omega_0} = \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Решение ищем в виде

$$u(\tau) = e^{-\alpha\tau} (C_3 e^{-\gamma\tau} + C_4 e^{\gamma\tau}) + C_1 \cos \beta\tau + C_2 \sin \beta\tau,$$

$$i(\tau) = -\frac{du}{d\tau} = e^{-\alpha\tau} \left(\alpha(C_3 e^{-\gamma\tau} + C_4 e^{\gamma\tau}) + \gamma(C_3 e^{-\gamma\tau} - C_4 e^{\gamma\tau}) \right) + \beta(C_1 \sin \beta\tau - C_2 \cos \beta\tau),$$

или

$$i(\tau) = e^{-\alpha\tau} \left((\alpha + \gamma)C_3 e^{-\gamma\tau} + (\alpha - \gamma)C_4 e^{\gamma\tau} \right) + \beta(C_1 \sin \beta\tau - C_2 \cos \beta\tau),$$

При подстановке начальных условий

$$\begin{cases} u_0 = C_3 + C_4 + C_1 \\ 0 = \alpha(C_3 + C_4) + \gamma(C_3 - C_4) - \beta C_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} C_3 = u_0 - C_4 - C_1 \\ C_3(\alpha + \gamma) = -C_4(\alpha - \gamma) + \beta C_2 \end{cases},$$
$$\begin{cases} C_3 = \frac{(u_0 - C_1)(\gamma - \alpha) + \beta C_2}{2\gamma} \\ C_4 = \frac{(u_0 - C_1)(\gamma + \alpha) - \beta C_2}{2\gamma} \end{cases}.$$

7. Резонанс для напряжения

Выясним, при каких условиях в системе устанавливаются колебания с максимальной амплитудой колебания заряда и напряжения на конденсаторе. Рассматриваем только частное решение.

Амплитуда в (4.6) максимальна, если минимален знаменатель, ещё точнее подкоренное выражение, следовательно,

$$\beta_{рез} = \sqrt{1 - 2\alpha^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_{рез} = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 2}, \quad \text{или} \quad \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_{рез} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\delta^2} - 2}.$$

Таким образом, резонанс наступает при частоте вынуждающей силы несколько меньшей, чем собственная частота системы.

Амплитуда при этом равна

$$A_{рез} = \frac{E_m}{2\alpha\sqrt{1 - \alpha^2}}. \quad (7.2)$$

Очевидно, что резонансные явления могут наступить, если

$$\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

При большом декременте затухания явление резонанса, даже слабое, не возникает.

8. Резонанс для тока

Сила тока для частного решения $i(\tau) = -\frac{du}{d\tau} = A\beta \sin(\beta\tau - \varphi^*)$,

Легко видеть, что амплитуда тока максимальна, если $\omega_{рез} = \omega_0$, то есть совпадает с собственной частотой системы, что также просто доказать дифференцированием.

$$\left(\frac{\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}} \right)' = 0, \quad \left(\frac{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} - \beta \frac{-2\beta(1-\beta^2) + 4\alpha^2\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}}}{(1-\beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \right)' = 0,$$
$$(1-\beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2(1-\beta^2) - 4\alpha^2\beta^2 = (1-\beta^2)(1+\beta^2) = 0.$$

Очевидно, что резонанс тока достигается при $\beta = 1$, или $\omega = \omega_0$.

Безразмерная амплитуда тока при этом

$$i_{m_res} = \frac{E_m}{2\alpha}, \quad tg\varphi^* = \infty, \quad \varphi^* = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, сила тока

$$i(\tau) = \frac{E_m}{2\alpha} \cos \beta\tau, \quad \text{или} \quad I(t) = \frac{\varepsilon_{max}^{внеш}}{R} \cos \omega_0 t$$

То есть ток совпадает по фазе с напряжением.

9. Максимальные значения напряжения и тока без внешнего источника

$$E_m=0, C_1=0, C_2=0, u = \frac{U}{U_{norm}}, u_0=1, U_{norm}=U_0$$

9.1. Гармонические колебания

$$u(\tau) = u_m \cos \tau, U(t) = U_0 \cos \omega_0 t,$$

$$i(\tau) = u_0 \sin \tau, I(t) = \omega_0 C U_0 \sin \omega_0 t = \frac{U_0}{X_C} \sin \omega_0 t, X_C = \frac{1}{\omega_0 C}, i_m = 1, \text{ при } \tau_m = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда напряжение можно записать как

$$U(t) = U_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega_0 t\right) = -U_0 \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Можно говорить, что напряжение опережает ток на $\pi/2$.

При рассмотрении с точки зрения цепи переменного тока, напряжение на конденсаторе

$$U_C^*(t) = -U_C(t) = U_0 \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

отстает от тока, как это обычно и отмечается.

9.2. Слабое затухание

$$\begin{cases} C_4 = u_0 \\ C_3 = u_0 \frac{\alpha}{\gamma} \end{cases}$$

$$u(\tau) = u_0 \frac{1}{\gamma} e^{-\alpha\tau} (\alpha \sin \gamma\tau + \gamma \cos \gamma\tau) = u_0 \frac{1}{\gamma} e^{-\alpha\tau} \cos(\gamma\tau - \varphi_0), \text{ где } \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

$$i(\tau) = u_0 \frac{1}{\gamma} e^{-\alpha\tau} \sin \gamma\tau.$$

Максимум тока достигается при $\tau_m = \frac{1}{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{\alpha}$, и равен $i_m = u_0 e^{-\frac{\alpha}{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{\alpha}}$

9.3. Критический режим

$$u(\tau) = u_0 e^{-\tau} (\tau + 1),$$

$$i(\tau) = e^{-\tau} \tau.$$

Максимум тока достигается при $\tau_m = 1$ и равен $i_m = u_m e^{-1} = 0,3679$.

9.4. Сильное затухание

$$\begin{cases} C_3 = \frac{(\gamma - \alpha)}{2\gamma} \\ C_4 = \frac{(\gamma + \alpha)}{2\gamma} \end{cases}.$$

Напряжение и сила тока

$$u(\tau) = u_0 \frac{1}{2\gamma} e^{-\alpha\tau} \left((\gamma - \alpha)e^{-\gamma\tau} + (\gamma + \alpha)e^{\gamma\tau} \right),$$

$$i(\tau) = u_0 \frac{1}{2\gamma} e^{-\alpha\tau} \left(-e^{-\gamma\tau} + e^{\gamma\tau} \right)$$

Максимум тока достигается при $\tau_m = \frac{1}{2\gamma} \ln \left(\frac{\alpha + \gamma}{\alpha - \gamma} \right) = \frac{1}{\gamma} \ln(\alpha + \gamma)$ и равен

$$i_m = u_0 (\alpha + \gamma)^{-\frac{\alpha}{\gamma}}.$$