

4. Катушка в цепи переменного тока (без конденсатора) $C=0$

Из второго правила Кирхгофа

$$IR = \varepsilon_m \cos \omega t - L \frac{dI}{dt}. \quad (4.1)$$

$$L \frac{dI}{dt} + IR = \varepsilon_m \cos \omega t, \quad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{\varepsilon_m}{L} \cos \omega t.$$

– дифференциальное обыкновенное линейное неоднородное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами.

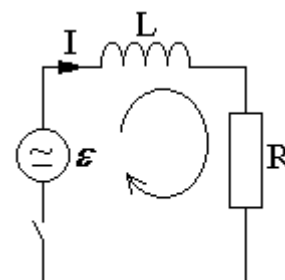


Рис. 4

Если обозначить $\delta = \frac{R}{L}$ – декремент затухания,

то уравнение принимает вид

$$\frac{dI}{dt} + \delta I = \frac{\varepsilon_m}{L} \cos \omega t. \quad (4.2)$$

Это уравнение и моделируются в Mathcad сравнением численного решения дифференциального уравнения методом Рунге-Кутты и аналитического решения. В Windows-приложении используется только аналитическое решение.

4.1. Частное решение

Полное решение неоднородного уравнения складывается из полного решения однородного $I^0(t)$ и частного решения неоднородного $I^*(t)$.

Частное решение ищем в виде

$$I^*(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (4.1.1)$$

Это решение следует подставить в (4.2) и приравнять коэффициенты при гармонических функциях, так как уравнение должно выполняться в любой момент времени.

$$-C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t + C_1 \delta \cos \omega t + C_2 \delta \sin \omega t = \frac{\varepsilon_m}{L} \cos \omega t.$$

$$\begin{cases} -C_1 \omega + C_2 \delta = 0 \\ C_2 \omega + C_1 \delta = \frac{\varepsilon_m}{L} \end{cases}, \quad \begin{cases} C_2 = C_1 \frac{\omega}{\delta} \\ C_1 \left(\frac{\omega^2}{\delta} + \delta \right) = \frac{\varepsilon_m}{L} \end{cases}, \quad \begin{cases} C_2 = \frac{\varepsilon_m}{L} \frac{\omega}{\omega^2 + \delta^2} \\ C_1 = \frac{\varepsilon_m}{L} \frac{\delta}{\omega^2 + \delta^2} \end{cases}$$

Тогда общее решение ищем в виде

$$I(t) = Ae^{-\delta t} + \frac{\varepsilon_m}{L} \frac{1}{\omega^2 + \delta^2} (\delta \cos \omega t + \omega \sin \omega t).$$

$$I(t) = Ae^{-\delta t} + \frac{\varepsilon_m}{L} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \delta^2}} \cos(\omega t - \varphi), \text{ где } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{\delta} = \frac{\omega L}{R}.$$

4.2. Начальные условия

Начальное условие $I(t=0)=0$.

$$0 = A + \frac{\varepsilon_m}{L} \frac{\delta}{\omega^2 + \delta^2}, \quad A = -\frac{\varepsilon_m}{L} \frac{\delta}{\omega^2 + \delta^2} = -\frac{\varepsilon_m}{R} \frac{\delta^2}{\omega^2 + \delta^2}.$$

Окончательное решение для силы тока

$$I(t) = -\frac{\varepsilon_m}{R} \left(\frac{\delta^2}{\omega^2 + \delta^2} e^{-\delta t} - \frac{\delta}{\omega^2 + \delta^2} (\delta \cos \omega t + \omega \sin \omega t) \right)$$

Или

$$I(t) = -\frac{\varepsilon_m}{L} \frac{1}{\omega^2 + \delta^2} (\delta e^{-\delta t} - \delta \cos \omega t - \omega \sin \omega t). \quad (4.2.1)$$

Напряжение на резисторе

$$U_R(t) = I(t)R = -\frac{\varepsilon_m}{L} \frac{R}{\omega^2 + \delta^2} (\delta e^{-\delta t} - \delta \cos \omega t - \omega \sin \omega t)$$
$$U_R(t) = -\frac{\varepsilon_m}{L} \frac{R}{\omega^2 + \delta^2} (\delta e^{-\delta t} - \delta \cos \omega t - \omega \sin \omega t). \quad (4.2.2)$$

ЭДС самоиндукции в катушке

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt} = \varepsilon_m \frac{1}{\omega^2 + \delta^2} (-\delta^2 e^{-\delta t} + \delta \omega \sin \omega t - \omega^2 \cos \omega t)$$
$$\varepsilon_L(t) = \varepsilon_m \frac{1}{\omega^2 + \delta^2} (-\delta^2 e^{-\delta t} + \delta \omega \sin \omega t - \omega^2 \cos \omega t). \quad (4.2.3.1)$$

или

$$\varepsilon_L(t) = U_R(t) - \varepsilon_m \cos \omega t. \quad (4.2.3.2)$$

Энергия тока в катушке

$$W_L(t) = \frac{LI^2(t)}{2}. \quad (4.2.4)$$

4.3. Частные случаи, если $C=0$

4.3.1. ЭДС источника равна нулю $\varepsilon_m=0$

Ничего нет.

4.3.2. Резистора нет $R=0$, $\delta \rightarrow 0$ и источник постоянного тока $\omega=0$

Сила тока

$$I(t) = \frac{\varepsilon_m}{R} (1 - e^{-\delta t}) = \frac{\varepsilon_m}{R} (1 - 1 + \delta t) = \frac{\varepsilon_m}{R} \delta t = \frac{\varepsilon_m}{L} t.$$

Напряжение на резисторе

$$U_R(t) = 0.$$

ЭДС самоиндукции в катушке

$$\varepsilon_L(t) = -\varepsilon_m = \text{const}.$$

Энергия тока в катушке

$$W_L(t) = \frac{\varepsilon_m^2}{2L} t^2.$$

4.3.3. Источник постоянного тока $\omega=0$

Сила тока

$$I(t) = -\frac{\varepsilon_m}{R} e^{-\delta t} + \frac{\varepsilon_m}{R} = \frac{\varepsilon_m}{R} (1 - e^{-\delta t}).$$

Напряжение на резисторе

$$U_R(t) = \varepsilon_m (1 - e^{-\delta t}).$$

ЭДС самоиндукции в катушке

$$\varepsilon_L(t) = -\varepsilon_m e^{-\delta t}, \text{ или } \varepsilon_L(t) = U_R(t) - \varepsilon_m.$$

Энергия тока в катушке

$$W_L(t) = \frac{LI^2(t)}{2} = \frac{L\varepsilon_m^2}{2R^2} (1 - e^{-\delta t})^2.$$

4.3.4. Резистора нет $R=0$, $\delta \rightarrow 0$

Сила тока

$$I(t) = \frac{\varepsilon_m}{L\omega} \sin \omega t = \frac{\varepsilon_m}{X_L} \sin \omega t.$$

Напряжение на резисторе

$$U_R(t) = 0.$$

ЭДС самоиндукции в катушке

$$\varepsilon_L(t) = -\varepsilon_m \cos \omega t.$$

Энергия тока в катушке

$$W_L(t) = \frac{\varepsilon_m^2}{2L\omega^2} \sin^2 \omega t.$$

4.4. процедура обезразмеривания, если $C=0$

4.4.1. ЭДС источника равна нулю $\varepsilon_m=0$

Ничего нет.

4.4.2. Резистора нет $R=0$, $\delta \rightarrow 0$ и источник постоянного тока $\omega=0$

$U_{norm} = |\varepsilon_m|$, $I_{norm} = \frac{|\varepsilon_m|}{L}$ – здесь размерная величина $[I_{norm}] = A/c$, так как нет

характерного масштаба времени.

Дифференциальное уравнение

$$\frac{di}{dt} = \text{sign}(\varepsilon_m).$$

Сила тока

$$i(t) = \frac{I(t)}{I_{norm}} = \text{sign}(\varepsilon_m)t.$$

Напряжение на резисторе

$$u_R(t) = 0.$$

ЭДС самоиндукции в катушке

$$e_L = \frac{\varepsilon_L}{U_{norm}} = -\text{sign}(\varepsilon_m) = \text{const}.$$

Энергия тока в катушке $W_{norm} = \frac{\varepsilon_m^2}{2L}$ – размерная величина, $[W_{norm}] = \text{Дж/с}^2$

$$w_L(t) = \frac{W_L(t)}{W_{norm}} = t^2.$$

4.4.3. Источник постоянного тока $\omega=0, R \neq 0$

$\tau = \delta t$ – безразмерное время, $U_{norm} = |\varepsilon_m|$, $I_{norm} = \frac{|\varepsilon_m|}{R}$, $W_{norm} = \frac{LI_{norm}^2}{2}$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{di}{d\tau} + i = \text{sign}(\varepsilon_m).$$

Сила тока

$$i(\tau) = \frac{I(t)}{I_{norm}} = \text{sign}(\varepsilon_m)(1 - e^{-\tau}).$$

Напряжение на резисторе

$$u_R(\tau) = \frac{U_R(t)}{U_{norm}} = \text{sign}(\varepsilon_m)(1 - e^{-\tau}) = i(\tau).$$

ЭДС самоиндукции в катушке

$$e_L(\tau) = \frac{\varepsilon_L(t)}{U_{norm}} = -\text{sign}(\varepsilon_m)e^{-\tau}, \text{ или } \varepsilon_L(\tau) = U_R(\tau) - \varepsilon_m.$$

Энергия тока в катушке

$$w_L(\tau) = \frac{W_L(t)}{W_{norm}} = (1 - e^{-\tau})^2.$$

4.4.4. Резистора нет $R=0, \delta \rightarrow 0, \omega \neq 0$

$\tau = \omega t$ – безразмерное время, $U_{norm} = |\varepsilon_m|$, $I_{norm} = \frac{|\varepsilon_m|}{L\omega}$, $W_{norm} = \frac{LI_{norm}^2}{2}$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{di}{d\tau} = \text{sign}(\varepsilon_m) \cos \tau$$

Сила тока

$$i(\tau) = \frac{I(t)}{I_{norm}} = \text{sign}(\varepsilon_m) \sin \tau.$$

Напряжение на резисторе

$$u_R(\tau) = 0.$$

ЭДС самоиндукции в катушке

$$e_L(\tau) = \frac{\varepsilon_L(t)}{U_{norm}} = -\text{sign}(\varepsilon_m) \cos \tau.$$

Энергия тока в катушке

$$w = \frac{W_L(t)}{W_{norm}} = \sin^2 \tau.$$

4.4.5. Только $C=0$

$\tau = \delta t$ – безразмерное время, $\beta = \frac{\omega}{\delta} = \frac{\omega L}{R}$ – отношение частоты тока источника к декременту, оно же – отношение индуктивного сопротивления к активному, $U_{norm} = |\varepsilon_m|$, $I_{norm} = \frac{|\varepsilon_m|}{R}$, $W_{norm} = \frac{LI_{norm}^2}{2}$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{di}{d\tau} + i = \text{sign}(\varepsilon_m) \cos \beta \tau$$

Сила тока

$$i(\tau) = \frac{I(t)}{I_{norm}} = -\text{sign}(\varepsilon_m) \frac{1}{1 + \beta^2} (e^{-\tau} - \cos \beta \tau - \beta \sin \beta \tau). \quad (4.4.5.1)$$

Напряжение на резисторе

$$u_R(\tau) = \frac{U_R(t)}{U_{norm}} = -\text{sign}(\varepsilon_m) \frac{1}{1 + \beta^2} (e^{-\tau} - \cos \beta \tau - \beta \sin \beta \tau) = i(\tau). \quad (4.4.5.2)$$

ЭДС самоиндукции в катушке

$$e_L(\tau) = \frac{\varepsilon_L(t)}{U_{norm}} = \text{sign}(\varepsilon_m) \frac{1}{1 + \beta^2} (-e^{-\delta t} + \beta \sin \beta \tau - \beta^2 \cos \beta \tau). \quad (4.4.5.3.1)$$

или

$$e_L(\tau) = \frac{\varepsilon_L(t)}{U_{norm}} = i(\tau) - \text{sign}(\varepsilon_m) \cos \beta \tau. \quad (4.4.5.3.2)$$

Энергия тока в катушке

$$w_L(\tau) = \frac{W_L(t)}{W_{norm}} = \frac{I^2(t)}{I_{norm}^2} = i^2(\tau). \quad (4.2.4)$$

4.5. Другая процедура обезразмеривания, если $C=0$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dI}{dt} + \delta I = \frac{\varepsilon_m}{L} \cos \omega t. \quad (4.5.1)$$

Сила тока

$$I(t) = -\frac{\varepsilon_m}{L} \frac{1}{\omega^2 + \delta^2} (\delta e^{-\delta t} - \delta \cos \omega t - \omega \sin \omega t). \quad (4.5.2)$$

Напряжение на резисторе

$$U_R(t) = -\frac{\varepsilon_m}{L} \frac{R}{\omega^2 + \delta^2} (\delta e^{-\delta t} - \delta \cos \omega t - \omega \sin \omega t). \quad (4.5.3)$$

ЭДС самоиндукции в катушке

$$\varepsilon_L(t) = U_R(t) - \varepsilon_m \cos \omega t. \quad (4.5.4)$$

Энергия тока в катушке

$$W_L(t) = \frac{LI^2(t)}{2}. \quad (4.5.5)$$

Если ввести параметры: $\omega_x = \sqrt{\omega^2 + \delta^2} = \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2} = \frac{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}{L} = \frac{|Z|}{L}$ –

характерная частота, где $|Z|$ – модуль импеданса, $\tau = \omega_x t$ – безразмерное

время, $\beta = \frac{\omega}{\omega_x} = \frac{\omega L}{|Z|}$ – отношение частоты тока источника к характерной

частоте, оно же – отношение индуктивного сопротивления к модулю

импеданса, $\frac{\delta}{\omega_x} = \sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_x}\right)^2} = \frac{R}{|Z|}$, $U_{norm} = |\varepsilon_m|$, $I_{norm} = \frac{|\varepsilon_m|}{L\omega_x}$, $W_{norm} = \frac{LI_{norm}^2}{2}$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{di}{d\tau} + \sqrt{1 - \beta^2} i = \text{sign}(\varepsilon_m) \cos \beta \tau. \quad (4.5.1)$$

Сила тока

$$i(\tau) = \frac{I(t)}{I_{norm}} = -\text{sign}(\varepsilon_m) \left(\sqrt{1 - \beta^2} e^{-\sqrt{1 - \beta^2} \tau} - \sqrt{1 - \beta^2} \cos \beta \tau - \beta \sin \beta \tau \right). \quad (4.5.2)$$

Напряжение на резисторе

$$u_R(\tau) = \frac{U_R(t)}{U_{norm}} = -\text{sign}(\varepsilon_m) \sqrt{1 - \beta^2} \left(\sqrt{1 - \beta^2} e^{-\sqrt{1 - \beta^2} \tau} - \sqrt{1 - \beta^2} \cos \beta \tau - \beta \sin \beta \tau \right) = i(\tau) \sqrt{1 - \beta^2} \quad (4.5.3)$$

ЭДС самоиндукции в катушке

$$e_L(\tau) = u_R(\tau) - \text{sign}(\varepsilon_m) \cos \beta \tau. \quad (4.5.4)$$

Энергия тока в катушке

$$w(\tau) = \frac{W_L(t)}{W_{norm}} = \left(\frac{I(t)}{I_{norm}} \right)^2 = i^2(\tau). \quad (4.5.5)$$

Этот вариант обезразмеривания и используется в программе.

4.6. Частные случаи $C=0$

4.4.1. ЭДС источника равна нулю $\varepsilon_m=0$

Ничего нет.

4.6.2. Резистора нет $R=0$. $\omega_x = \omega$, $\beta = 1$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{di}{d\tau} = \text{sign}(\varepsilon_m) \cos \tau. \quad (4.5.1)$$

Сила тока

$$i(\tau) = \text{sign}(\varepsilon_m) \sin \tau. \quad (4.5.2)$$

Напряжение на резисторе

$$u_R(\tau) = 0. \quad (4.5.3)$$

ЭДС самоиндукции в катушке

$$e_L(\tau) = -\text{sign}(\varepsilon_m) \cos \tau. \quad (4.5.4)$$

Энергия тока в катушке

$$w(\tau) = i^2(\tau). \quad (4.5.5)$$

4.6.3. Источник постоянного тока $\omega=0$

$$\omega_x = \delta, \beta = 0$$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{di}{d\tau} + i = \text{sign}(\varepsilon_m). \quad (4.5.1)$$

Сила тока

$$i(\tau) = -\text{sign}(\varepsilon_m)(e^{-\tau} - 1). \quad (4.5.2)$$

Напряжение на резисторе

$$u_R(\tau) = i(\tau). \quad (4.5.3)$$

ЭДС самоиндукции в катушке

$$e_L(\tau) = u_R(\tau) - \text{sign}(\varepsilon_m). \quad (4.5.4)$$

Энергия тока в катушке

$$w(\tau) = i^2(\tau). \quad (4.5.5)$$

Эти случаи легко получаются из общего.

4.6.2. Резистора нет $R=0$ и источник постоянного тока $\omega=0$

Это особый случай. Его надо рассматривать отдельно.

$$\omega_x = 0, \delta = 0, \beta = \frac{\omega}{\omega_x} = \frac{\omega L}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} - \text{неопределенное.}$$

Дифференциальное уравнение: Из исходного

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon_m}{L}. \quad (4.5.1)$$

Из обезразмеренного

$$\frac{di}{d\tau} + \sqrt{1 - \beta^2} i = \text{sign}(\varepsilon_m) \cos \beta \tau. \quad (4.5.1)$$

Не получится. Поэтому здесь другие константы нормировки. $U_{norm} = |\varepsilon_m|$,

$I_{norm} = \frac{|\varepsilon_m|}{L}$ – здесь размерная величина $[I_{norm}] = \text{А/с}$. Время не обезразмеривается, так как нет характерного масштаба времени. Дифференциальное уравнение

$$\frac{di}{dt} = \text{sign}(\varepsilon_m).$$

Сила тока

$$i(t) = \frac{I(t)}{I_{norm}} = \text{sign}(\varepsilon_m) t.$$

Напряжение на резисторе

$$u_R(t) = 0.$$

ЭДС самоиндукции в катушке

$$e_L = \frac{\varepsilon_L}{U_{norm}} = -\text{sign}(\varepsilon_m) = \text{const}.$$

Энергия тока в катушке $W_{norm} = \frac{\varepsilon_m^2}{2L}$ – размерная величина, $[W_{norm}] = \text{Дж/с}^2$.

$$w_L(t) = \frac{W_L(t)}{W_{norm}} = t^2.$$

Этот вариант обезразмеривания и используется в программе.

4.7. Определение шага по времени.

Для правильного определения шага выдачи данных нужно сравнить характерные времена

Характерное время размерное	$T_c = \frac{1}{\delta}$ Время релаксации	$T_4 = \frac{T_x}{4} = \frac{\pi}{2\omega_x}$ Четверть периода
Безразмерное характер. время	$\tau_c = \omega_x T_c = \frac{\omega_x}{\delta}$	$\tau_4 = \omega_x T_4 = \frac{\pi}{2}$

$\tau_c \leq \tau_4$, если

$$\frac{\omega_x}{\delta} \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\sqrt{\omega^2 + \delta^2}}{\delta} \leq \frac{\pi}{2}, \quad \omega^2 + \delta^2 \leq \frac{\pi}{2} \delta^2, \quad \omega \leq \delta \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1}, \quad \delta = \frac{R}{L}.$$

Следовательно, интервал времени, который нужно разбить на заданное число шагов

$$\tau_{\min} = \begin{cases} \frac{\omega_x}{\delta}, & \text{если } \omega \leq \delta \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } \omega > \delta \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} \end{cases} \quad \tau_{\min} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\omega^2}{\delta^2} + 1}, & \text{если } \omega \leq \delta \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } \omega > \delta \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} \end{cases}$$