

3. Конденсатор в цепи переменного тока (без катушки) $L=0$

Из второго правила Кирхгофа

$$IR = U_C + \varepsilon. \quad (3.1)$$

$$RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = -\varepsilon_m \cos \omega t, \quad I = -C \frac{dU_C}{dt},$$

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC} U_C = -\frac{\varepsilon_m}{RC} \cos \omega t.$$

– дифференциальное обыкновенное линейное неоднородное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами.

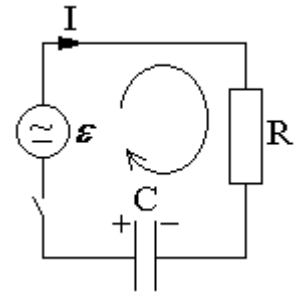


Рис. 3

Если обозначить $\delta = \frac{1}{RC}$ – декремент затухания, то уравнение принимает вид

$$\frac{dU_C}{dt} + \delta U_C = -\varepsilon_m \delta \cos \omega t. \quad (3.4)$$

Это уравнение и моделируются в Mathcad сравнением численного решения дифференциального уравнения методом Рунге-Кутты и аналитического решения. В Windows-приложении используется только аналитическое решение.

3.1. Частное решение

Полное решение неоднородного уравнения складывается из полного решения однородного $U^0(t)$ и частного решения неоднородного $U^*(t)$.

Частное решение ищем в виде

$$U^*(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (3.1.1)$$

Это решение следует подставить в (3.4) и приравнять коэффициенты при гармонических функциях, так как уравнение должно выполняться в любой момент времени.

$$-\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t + \delta C_1 \cos \omega t + \delta C_2 \sin \omega t = -\varepsilon_m \delta \cos \omega t.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} -\omega C_1 + \delta C_2 = 0 \\ \omega C_2 + \delta C_1 = -\varepsilon_m \delta \end{cases}, \begin{cases} C_2 = \frac{\omega}{\delta} C_1 \\ \omega \frac{\omega}{\delta} C_1 + \delta C_1 = -\varepsilon_m \delta \end{cases}, \begin{cases} C_2 = \frac{\omega}{\delta} C_1 \\ C_1 \left(\frac{\omega^2}{\delta} + \delta \right) = -\varepsilon_m \delta \end{cases}, \begin{cases} C_2 = -\varepsilon_m \frac{\delta \omega}{\omega^2 + \delta^2} \\ C_1 = -\varepsilon_m \frac{\delta^2}{\omega^2 + \delta^2} \end{cases}$$

Тогда общее решение ищем в виде

$$U_C(t) = A e^{-\delta t} - \frac{\varepsilon_m \delta}{\omega^2 + \delta^2} (\delta \cos \omega t + \omega \sin \omega t), \quad (3.1.3)$$

Или в свёрнутом виде

$$U_C(t) = A e^{-\delta t} - \frac{\varepsilon_m \delta}{\sqrt{\omega^2 + \delta^2}} \cos(\omega t - \varphi), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{\delta} = \omega C R = \frac{R}{X_C} \quad (3.1.4)$$

Итог

$$U_C(t) = Ae^{-\delta t} - \frac{\varepsilon_m \delta}{\omega^2 + \delta^2} (\delta \cos \omega t + \omega \sin \omega t), \quad (3.1.5)$$

$$I(t) = C\delta \left(Ae^{-\delta t} + \frac{\varepsilon_m \omega}{\omega^2 + \delta^2} (-\delta \sin \omega t + \omega \cos \omega t) \right), \quad (3.1.5)$$

3.2. Начальные условия

Константу определяем из начальных условий. Если считать конденсатор изначально заряженным до напряжения U_0 (обладает зарядом q_0), а тока в цепи нет, то

$$U|_{t=0} = U_0, \quad I|_{t=0} = -C \frac{dU}{dt} \Big|_{t=0} = 0. \quad (3.2.1)$$

Удовлетворить обоим условиям одновременно нельзя, так как уравнение первого порядка.

3.2.1. Второе начальное условие

$$A = -\frac{\varepsilon_m \omega^2}{\omega^2 + \delta^2}.$$

Тогда решение

$$U_C(t) = -\frac{\varepsilon_m}{\omega^2 + \delta^2} (\omega^2 e^{-\delta t} + \delta^2 \cos \omega t + \omega \delta \sin \omega t), \quad U_C(0) = -\varepsilon_m,$$

$$I(t) = -C\delta \frac{\varepsilon_m \omega}{\omega^2 + \delta^2} (\omega e^{-\delta t} + \delta \sin \omega t - \omega \cos \omega t), \quad I(0) = 0.$$

Таким образом, в этой ситуации в начальный момент времени конденсатор мгновенно перезаряжается, а ток равен нулю. Это трудно объяснить с физической точки зрения. Поэтому используем первое начальное условие.

3.2.2. Первое начальное условие

$$U_0 = A - \frac{\varepsilon_m \delta^2}{\omega^2 + \delta^2}, \quad A = U_0 + \frac{\varepsilon_m \delta^2}{\omega^2 + \delta^2}.$$

Тогда решение

$$U_C(t) = \left(U_0 + \varepsilon_m \frac{\delta^2}{\omega^2 + \delta^2} \right) e^{-\delta t} - \varepsilon_m \frac{\delta}{\omega^2 + \delta^2} (\delta \cos \omega t + \omega \sin \omega t), \quad (3.2.2.1)$$

$$I(t) = C\delta \left(\left(U_0 + \frac{\varepsilon_m \delta^2}{\omega^2 + \delta^2} \right) e^{-\delta t} + \frac{\varepsilon_m \omega}{\omega^2 + \delta^2} (-\delta \sin \omega t + \omega \cos \omega t) \right), \quad (3.2.2.2)$$

причём $U_C(0) = U_0$, $I(0) = C\delta(U_0 + \varepsilon_m) = \frac{U_0 + \varepsilon_m}{R}$.

В этой ситуации ток устанавливается мгновенно скачком, так как нет

катушки и нечем замедлить нарастание тока. Это объяснимо с физической точки зрения. Поэтому используем дальше это решение.

Если свернуть и использовать исходные параметры, то

$$U_C(t) = \left(U_0 + \varepsilon_m \frac{1}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \right) e^{-\frac{t}{RC}} - \varepsilon_m \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \cos(\omega t - \arctg(\omega CR)),$$

$$I(t) = \frac{1}{R} \left(\left(U_0 + \frac{\varepsilon_m}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \right) e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{\varepsilon_m \omega CR}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \sin(\omega t - \arctg(\omega CR)) \right)$$

Энергия конденсатора

$$W_C(t) = \frac{CU_C^2}{2}.$$

Можно заметить, что

$$U_C(t) - I(t)R = \varepsilon_m \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + R^2 \omega^2 C^2}} \sin(\omega t - \arctg(R\omega C)) - \varepsilon_m \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cos(\omega t - \arctg(R\omega C))$$

$$U_C(t) - I(t)R = -\varepsilon_m \left(\frac{1}{\sqrt{1 + R^2 \omega^2 C^2}} \cos(\omega t - \arctg(R\omega C)) - \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + R^2 \omega^2 C^2}} \sin(\omega t - \arctg(R\omega C)) \right)$$

$$U_C(t) - I(t)R = -\varepsilon_m \cos(\omega t),$$

как это и должно быть из уравнения (3.1).

$$I(t) = \frac{U_C(t) + \varepsilon_m \cos(\omega t)}{R}.$$

3.3. Частные случаи

При больших временах первая часть решения затухает и остаётся только

$$U_C(t) = -\varepsilon_m \frac{\delta}{\omega^2 + \delta^2} (\delta \cos \omega t + \omega \sin \omega t) = -\varepsilon_m \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cos(\omega t - \arctg(R\omega C))$$

$$U_C(t) = -\varepsilon_m \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \cos\left(\omega t - \arctg\left(\frac{R}{X_C}\right)\right)$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon_m}{R} \frac{\omega}{\omega^2 + \delta^2} (-\delta \sin \omega t + \omega \cos \omega t) = -\varepsilon_m \frac{\omega C}{\sqrt{1 + R^2 \omega^2 C^2}} \sin(\omega t - \arctg(R\omega C))$$

$$I(t) = -\varepsilon_m \frac{1}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \sin\left(\omega t - \arctg\left(\frac{R}{X_C}\right)\right)$$

Сдвиг фаз не совпадает по знаку с традиционно описанным в учебниках из-за трактовки понятия напряжения на конденсаторе.

Особый случай при $R=0$.

В начальный момент времени напряжение на конденсаторе скачком становится равным $-\varepsilon_m$, а сила тока уходит в бесконечность.

3.4. Итог

$R \neq 0, \omega \neq 0$	$R=0, \delta \rightarrow \infty, \omega \neq 0$. Переменный ток
Общее решение	$U_C(t) = -\varepsilon_m \cos \omega t$. Напряжение скачком меняется от U_0 до $-\varepsilon_m$ в начальный момент времени
	$I(t) = -\varepsilon_m C \omega \sin \omega t = -\frac{\varepsilon_m}{X_C} \sin \omega t$
	$W_C(t) = \frac{C U_C^2}{2} = \frac{C \varepsilon_m^2}{2} \cos^2 \omega t$.
$R \neq 0, \omega = 0$ постоянный ток	$R=0, \delta \rightarrow \infty, \omega = 0$. Постоянный ток
$U_C(t) = (U_0 + \varepsilon_m) e^{-\delta t} - \varepsilon_m$	$U_C(t) = -\varepsilon_m$. Напряжение скачком меняется от U_0 до $-\varepsilon_m$ в начальный момент времени. Потом остается постоянным. Аналогично, если источника нет $\varepsilon_m = 0$, конденсатор заряжен.
$I(t) = \frac{U_0 + \varepsilon_m}{R} e^{-\delta t}$	$I(t) = 0$. Ток в начальный момент времени бесконечен, а потом равен 0
	$W_C(t) = \frac{C \varepsilon_m^2}{2} = const$. Энергия скачком меняется в начальный момент времени. Потом остается постоянной.

3.5. Процедура обезразмеривания

3.5.1 Процедура обезразмеривания при $R=0$

$$\tau = \omega t, U_{norm} = |\varepsilon_m|, I_{norm} = U_{norm} C \omega, W_{norm} = \frac{C \varepsilon_m^2}{2}.$$

$$u_C(\tau) = \frac{U_C(t)}{U_{norm}} = -\frac{\varepsilon_m}{U_{norm}} \cos \tau = -\text{sign}(\varepsilon_m) \cos \tau.$$

$$i(\tau) = \frac{I(t)}{I_{norm}} = -\frac{\varepsilon_m C \omega}{I_{norm}} \sin \tau = -\frac{\text{sign}(\varepsilon_m) U_{norm} C \omega}{I_{norm}} \sin \tau = -\text{sign}(\varepsilon_m) \sin \tau.$$

$$w(\tau) = \frac{W_C(t)}{W_{norm}} = \frac{C \varepsilon_m^2 u_C^2}{2 W_{norm}} = u_C^2.$$

3.5.2 Процедура обезразмеривания при $R \neq 0$

Параметры реальных конденсаторов и катушек индуктивности, как правило, таковы, что периоды и частоты неудобны для наблюдения.

Исходные уравнения:

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dU_C}{dt} + \delta U_C = -\varepsilon_m \delta \cos \omega t. \quad (3.5.2.1)$$

Напряжение на конденсаторе

$$U_C(t) = \left(U_0 + \varepsilon_m \frac{\delta^2}{\omega^2 + \delta^2} \right) e^{-\delta t} - \varepsilon_m \frac{\delta}{\omega^2 + \delta^2} (\delta \cos \omega t + \omega \sin \omega t), \quad (3.5.2.2)$$

Сила тока

$$I(t) = \frac{1}{R} \left(\left(U_0 + \frac{\varepsilon_m \delta^2}{\omega^2 + \delta^2} \right) e^{-\delta t} + \frac{\varepsilon_m \omega}{\omega^2 + \delta^2} (-\delta \sin \omega t + \omega \cos \omega t) \right), \quad (3.5.2.3)$$

Напряжение на резисторе

$$U_R(t) = \left(U_0 + \frac{\varepsilon_m \delta^2}{\omega^2 + \delta^2} \right) e^{-\delta t} + \frac{\varepsilon_m \omega}{\omega^2 + \delta^2} (-\delta \sin \omega t + \omega \cos \omega t), \quad (3.5.2.4)$$

Энергия конденсатора

$$W_C(t) = \frac{C U_C^2(t)}{2}, \quad (3.5.2.5)$$

Обозначим $u_C = \frac{U}{U_{norm}}$ – напряжение на конденсаторе, $E_m = \frac{\varepsilon_m}{U_{norm}}$ – ЭДС

источника, где $U_{norm} = \begin{cases} |U_0|, & \text{если } U_0 \neq 0 \\ |\varepsilon_m|, & \text{если } U_0 = 0 \end{cases}$, $i = \frac{I}{I_{norm}}$ – сила тока, а нормировка

силы тока $I_{norm} = \frac{U_{norm}}{R}$, $\delta = \frac{1}{RC}$ – декремент затухания, $W_{norm} = \frac{C U_{norm}^2}{2}$.

Если ввести параметры: $\omega_x = \sqrt{\omega^2 + \delta^2} = \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC} \right)^2} = \frac{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + 1}}{RC}$ –

характерная частота, $\tau = \omega_x t$ – безразмерное время,

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_x} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \delta^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{(RC)^2}}} = \frac{\omega CR}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + 1}} = \frac{R}{X_C \sqrt{\frac{R^2}{X_C^2} + 1}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{R}{|Z|}$$

– отношение частоты тока источника к характерной частоте, оно же – отношение активного сопротивления к модулю импеданса,

$$\alpha = \frac{\delta}{\omega_x} = \frac{\delta}{\sqrt{\omega^2 + \delta^2}} = \frac{\sqrt{\omega_x^2 - \omega^2}}{\omega_x} = \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + 1}} = \frac{X_C}{|Z|}$$

– отношение ёмкостного сопротивления к модулю импеданса.

Тогда в безразмерных переменных:

Дифференциальное уравнение

$$\frac{du_c}{d\tau} + \sqrt{1 - \beta^2} u_c = -E_m \sqrt{1 - \beta^2} \cos \beta \tau. \quad (3.5.2.1)$$

Для программирования:

$$\begin{cases} \frac{du_c}{d\tau} = -\alpha(u_c + E_m \cos \beta \tau) \\ i(\tau) = u_c(\tau) + E_m \cos \beta \tau \end{cases}.$$

Напряжение на конденсаторе

$$u_c(\tau) = \frac{U_c(t)}{U_{norm}} = (u_0 + E_m \alpha^2) e^{-\alpha \tau} - E_m \alpha (\alpha \cos \beta \tau + \beta \sin \beta \tau), \quad (3.5.2.2)$$

Сила тока

$$i(\tau) = \frac{I(t)}{I_{norm}} = (u_0 + E_m \alpha^2) e^{-\alpha \tau} + E_m \beta (-\alpha \sin \beta \tau + \beta \cos \beta \tau), \quad (3.5.2.3)$$

Для проверки или для более удобных вычислений (проверено в Mathcad)

$$i(\tau) = u_c(\tau) + E_m \cos \beta \tau, \quad (3.5.2.3)$$

Напряжение на резисторе

$$u_R(\tau) = \frac{U_R(t)}{U_{norm}} = (u_0 + E_m \alpha^2) e^{-\alpha \tau} + E_m \beta (-\alpha \sin \beta \tau + \beta \cos \beta \tau) = i(\tau), \quad (3.5.2.4)$$

Энергия конденсатора

$$w(\tau) = \frac{W_C(t)}{W_{norm}} = \frac{CU_c^2(t)}{W_{norm} 2} = \frac{CU_{norm} u_c^2(\tau)}{W_{norm} 2} = u_c^2(\tau), \quad (3.5.2.5)$$

Частный случай

$\omega = 0$ – постоянный ток. $\omega_x = \delta = \frac{1}{RC}$, $\beta = 0$, $\alpha = 1$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{du_c}{d\tau} + u_c = -E_m. \quad (3.5.2.1)$$

Напряжение на конденсаторе

$$u_c(\tau) = (u_0 + E_m) e^{-\tau} - E_m, \quad (3.5.2.2)$$

Сила тока

$$i(\tau) = (u_0 + E_m) e^{-\tau}, \text{ или } i(\tau) = u_c(\tau) + E_m \quad (3.5.2.3)$$

$R = 0$ – нет сопротивления. $\omega_x \rightarrow \infty$, $\beta = 0$, $\alpha = 1$

Этот случай надо рассматривать отдельно, так как обезразмеривание времени такое не подходит.

Для правильного определения шага выдачи данных нужно сравнить характерные времена

Характерное время размерное	$T_c = \frac{1}{\delta}$ Время релаксации	$T_4 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega_x}$ Четверть периода
Безразмерное характер. время	$\tau_c = \omega_x T_c = \frac{\omega_x}{\delta}$	$\tau_4 = \omega_x T_4 = \frac{\pi}{2}$

$\tau_c \leq \tau_4$, если

$$\frac{\omega_x}{\delta} \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\sqrt{\omega^2 + \delta^2}}{\delta} \leq \frac{\pi}{2}, \quad \omega^2 + \delta^2 \leq \frac{\pi}{2} \delta^2, \quad \omega \leq \delta \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1}$$

Следовательно, интервал времени, который нужно разбить на заданное число шагов

$$\tau_{\min} = \begin{cases} \frac{\omega_x}{\delta}, & \text{если } \omega \leq \delta \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } \omega > \delta \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} \end{cases}.$$