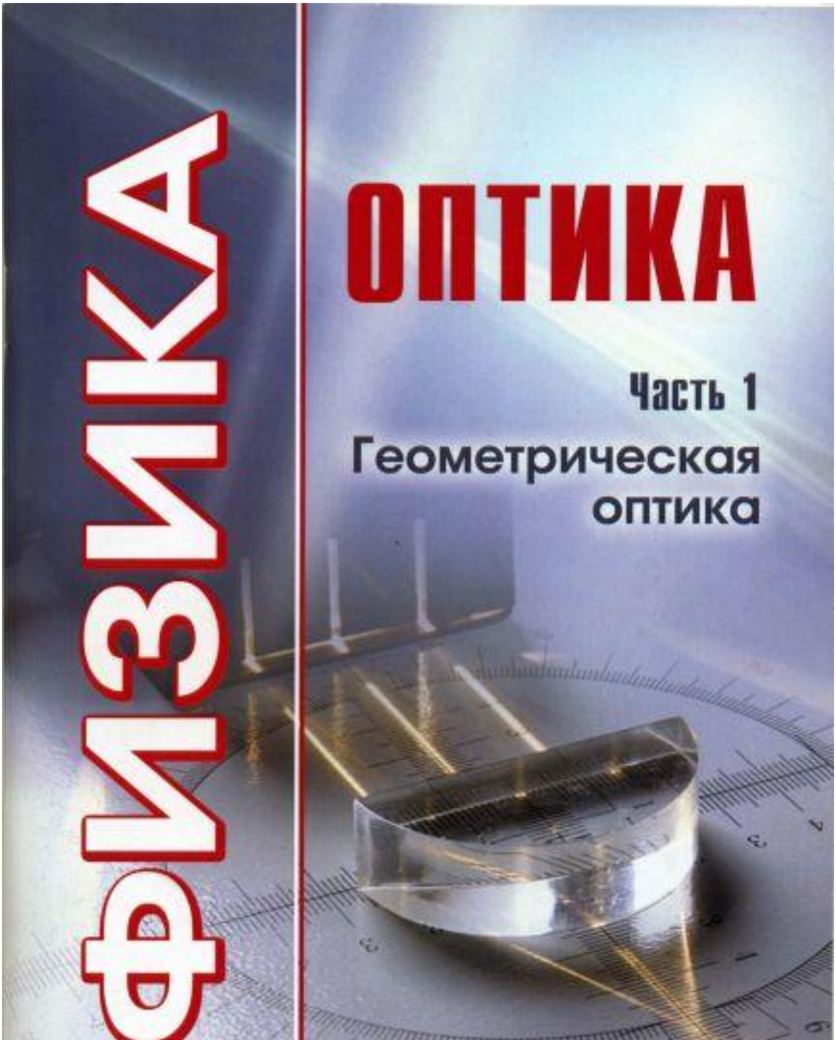
ФИЗИКА
ОПТИКА
Часть 1
Геометрическая
оптика

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тульский государственный педагогический университет
им. Л. Н. Толстого»

ФИЗИКА

Оптика

Учебное пособие

В двух частях

Часть 1
Геометрическая оптика

Издание второе,
переработанное и дополненное

Тула
Издательство ТГПУ им. Л. Н. Толстого
2013

ББК 22.34я73
Ф48

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор *Ю. П. Смирнов*
(ТулГУ);
доктор физико-математических наук, профессор *В. А. Панин*
(ТГПУ им. Л. Н. Толстого)

Ф48 **Физика.** Оптика: Учеб. пособие: В 2 ч. Ч. 1. Геометрическая оптика / Авт.-сост. А. В. Парамонов, Л. В. Никольская, И. А. Клепинина, А. В. Ермолов.– Изд. второе, перераб. и доп.– Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2013.– 146 с.

ISBN 978-5-87954-789-4 (ч. 1)
ISBN 978-5-87954-788-7

Пособие содержит теоретический материал, освещающий основные вопросы геометрической оптики (основные понятия и определения, методы построения и расчета изображений, даваемых оптическими системами и т. д.), и задачи, сопровождаемые подробным решением.

Издание предназначено студентам естественнонаучных специальностей университетов, для которых физика является профилирующим предметом.

ББК 22.34я73

ISBN 978-5-87954-789-4 (ч. 1)
ISBN 978-5-87954-788-7

СОДЕРЖАНИЕ

Глава I. Геометрическая оптика. 5

§ 1. Основные законы геометрической оптики 5

§ 2. Линзы 8

§ 3. Зеркала 10

3.1. Плоское зеркало 10

3.2. Сферическое зеркало. 10

§ 4. Описание оптических систем 12

4.1. Элементы оптических систем. 12

4.2. Взаимное расположение элементов в оптической системе. 14

4.3. Правила знаков. 16

4.4. Предмет и изображение в оптической систем. 17

§ 5. Теория идеальных оптических систем 18

5.1. Линейное, угловое, продольное увеличение. 19

5.2. Кардинальные точки и отрезки. 20

§ 6. Аберрации оптических систем 22

§ 7. Построение изображений в оптических системах 28

§ 8. Основные соотношения параксиальной оптики 30

8.1. Вывод зависимости между положением и размером предмета и изображения. 30

8.2. Уголковое увеличение и узловые точки. 32

8.3. Частные случаи положения предмета и изображения. 33

8.4. Связь продольного увеличения с поперечным и угловым. 34

8.5. Диоптрическое исчисление. 36

8.6. Инвариант Лагранжа-Гельмгольца. 36

Глава II. Решение задач. 38

Литература 146

ГЛАВА I. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

§ 1. Основные законы геометрической оптики

Оптика, как раздел электродинамики, включает теорию распространения светового излучения в неоднородной, неизотропной среде. В этом случае световая волна описывается уравнениями Максвелла, точное решение которых представляет сложную математическую проблему. Причина в том, что в этих уравнениях электромагнитные свойства произвольной среды представлены не коэффициентом преломления, а двумя наборами 18 величин, называемых тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей.

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \qquad div\vec{D} = \rho;$$

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}; \quad div\vec{B} = 0.$$

$$\oint\limits_{(L)} \vec{E}d\vec{l} = -\int\limits_{(S)} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S}; \qquad \int\limits_{(S)} \vec{D}d\vec{S} = \int\limits_{(V)} \rho dV;$$

$$\oint\limits_{(L)} \vec{H}d\vec{l} = I_{макро} + I_{см}; \qquad \oint\limits_{(S)} \vec{B}d\vec{S} = 0.$$

Задача существенно упрощается в приближении геометрической оптики: если в каждом небольшом участке пространства фронт волны можно рассматривать как плоскую поверхность, то можно говорить о направлении распространения волны, перпендикулярном волновому фронту. В геометрической оптике вводят математическое понятие луч – линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением распространения фронта волны в окрестности этой точки. Это приближение автоматически приводит к введению двух различных коэффициентов преломления, определяющих траектории лучей, различающихся поляризацией. В изотропной, однородной среде коэффициенты преломления одинаковы для лучей различной поляризации.

Геометрическая оптика рассматривает световую волну как пучок лучей, ортогональных к волновым фронтам, совершенно отвлекаясь от волновой природы света. Поэтому основные законы геометрической оптики – закон отражения и закон преломления – полностью игнорируют дифракционные явления. Это означает, что должны выполняться следующие условия:

1) длина волны $\lambda << a$, где a — характерные размеры неоднородности,

2) площадь сечения неоднородности значительно больше площади первых зон Френеля: расстояние r от неоднородности до точки наблюдения удовлетворяет условию $\lambda r << a^2$,

3) приращение показателя преломления на расстояниях порядка длины волны λ достаточно мало.

Пусть точечный источник света O расположен в однородной среде с показателем преломления n; $P(x, y, z)$ - точка наблюдения, $s(x, y, z) = OP$ расстояние между точками O и P. Фаза сферической волны $\varphi = \omega t - \frac{\omega l}{\upsilon}$. Очевидно, $\tau = \frac{s}{\upsilon} = \frac{ns}{c}$ - время распространения фронта волны. Лучи представляют собой пучок прямых, исходящих из точки O. Фазу волны можно предстаешь в виде $\varphi = \omega t - \frac{\omega l}{c}$. Величину $l = ns$ называют оптической длиной отрезка OP. Траектория луча света — отрезок прямой OP, соответствующий наименьшему значению оптической длины.

В 1662 г. П.Ферма установил основной закон геометрической оптики: световой луч, соединяющий две точки, представляет собой кривую, для которой оптическая длина принимает наименьшее значение.

Основной задачей геометрической оптики является определение траекторий лучей в оптически неоднородной среде, показатель преломления которой $n = n(x, y, z)$ является функцией координат. Принцип Ферма позволяет получить уравнения дня радиус-вектора произвольной точки луча, проходящего через любую точку заданного волнового фронта.

В оптически неоднородной среде луч представляет собой кривую линию. Разобьем ее на N малых отрезков длиной Δs_k $(k = 1, 2, ..., N)$. Выберем на каждом отрезке точку M_k. Обозначим через n_k, значение показателя преломления в точке M_k. Оптической длиной кривой, соединяющей точки L и P, называют величину $l = l(x, y, z)$:

$$l = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \max|\Delta S_k| \to 0}} \sum_{k=1}^{N} n_k \Delta S_k .$$

Время распространения малого участка фронта световой волны по траектории луча $\tau = \dfrac{l}{c}$.

С современной точки зрения принцип Ферма отражает волновую природу света: в точку наблюдения приходит волна, фаза которой равна экстремальному значению оптической длины: $\varphi_Э = \omega t - \dfrac{\omega l_Э}{c}$.

Еще до установления природы света были известны следующие законы:

Закон прямолинейного распространения света: свет в оптически однородной и изотропной среде распространяется прямолинейно.

Световой луч – линия, вдоль которой переносится световая энергия. В однородной среде лучи света представляют собой прямые линии.

Закон независимости световых пучков: эффект, производимый отдельным пучком, не зависит от того, действуют ли одновременно остальные пучки или они устранены.

Закон отражения: отраженный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и перпендикуляром, проведенным к границе раздела двух сред в точке падения; угол падения равен углу отражения $\angle\alpha = \angle\beta$.

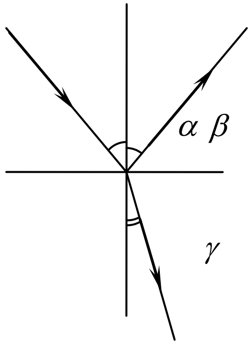

Рис. 1. *Преломление и отражение света на границе раздела двух сред*

Закон преломления (рис. 1): луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр, проведенный к границе раздела двух сред в точке падения, лежат в одной плоскости; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных сред и равна n_{21}, где n_{21} – относительный показатель преломления второй среды относительно первой, который равен отношению абсолютных показателей преломления двух сред.

Следовательно, закон преломления (рис.1) будет иметь вид:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n_{21}, \; n_{21} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Абсолютным показателем преломления среды называется величина n, равная отношению скорости электромагнитных волн в вакууме c к их фазовой скорости υ в среде.

Поскольку фазовая скорость $\upsilon = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, то $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, где ε и μ – соответственно электрическая и магнитная проницаемость среды.

§ 2. Линзы

Линзой называется прозрачное тело, ограниченное с двух сторон криволинейной поверхностью. (В частном случае одна из поверхностей может быть плоской) [7].

По внешней форме линзы делятся на:

1) двояковыпуклые;
2) плосковыпуклые;
3) двояковогнутые;
4) плосковогнутые;
5) выпукло-вогнутые.

Фирмы линз изображены на рис. 2.

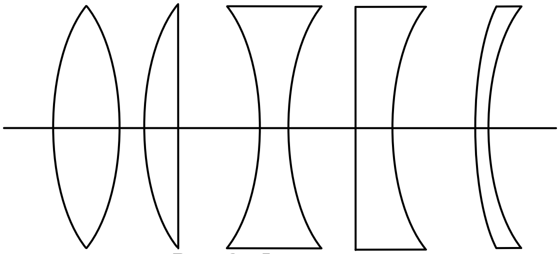

Рис. 2. *Форма линз*

Линза называется тонкой**,** если ее толщина значительно меньше, чем радиусы кривизны R_1 и R_2 обеих поверхностей. На оптических схемах линзы обычно обозначают двунаправленной стрелкой.

Радиус кривизны $R > 0$ для выпуклой поверхности; $R < 0$ для вогнутой.

Прямая проходящая через центры кривизны поверхностей линзы называется главной оптической осью.

Оптическим центром линзы (обычно обозначается *O*) называется точка, лежащая на главной оптической оси и обладающая тем свойством, что лучи проходя сквозь нее не преломляются. Побочными оптическими осями называются прямые, проходящие через оптический центр линзы и не совпадающие с главной оптической осью.

Фокусом линзы *F* называется точка, лежащая на главной оптической оси, в которой пересекаются лучи параксиального (приосевого) светового пучка, распространяющиеся параллельно главной оптической оси.

Фокальной плоскостью называется плоскость, проходящая через фокус линзы перпендикулярно ее главной оптической оси.

Фокусным расстоянием называется расстояние между оптическим центром линзы O и ее фокусом F.

$$F = \frac{1}{(n_{21} - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}.$$

Формула тонкой линзы:

$$\pm\frac{1}{F} = \pm\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f}.$$

Величина $D = \frac{1}{F}$ называется оптической силой линзы. Ее единица – диоптрия (*дптр*) - оптическая сила линзы с фокусным расстоянием 1 *м*.

Линзы с положительной оптической силой являются собирающими, с отрицательной - рассеивающими.

В отличие от собирающей линзы, рассеивающая линза имеет мнимые фокусы. В мнимом фокусе сходятся (после преломления) воображаемые продолжения лучей, падающих на рассеивающую линзу параллельно главной оптической оси.

§ 3. Зеркала

3.1. Плоское зеркало

Простейшим оптическим устройством, способным создавать изображение предмета, является плоское зеркало. Изображение предмета, даваемое плоским зеркалом, формируется за счет лучей, отраженных от зеркальной поверхности. Это изображение является мнимым, так как оно образуется пересечением не самих отраженных лучей, а их продолжений в «зазеркалье».

Вследствие закона отражения света мнимое изображение предмета располагается симметрично относительно зеркальной поверхности. Размер изображения равен размеру самого предмета.

3.2. Сферическое зеркало

Сферическим зеркалом называют зеркально отражающую поверхность, имеющую форму сферического сегмента. Центр сферы, из которой вырезан сегмент, называют оптическим центром зеркала.

Вершину сферического сегмента называют полюсом. Прямая, проходящая через оптический центр и полюс зеркала, называется главной оптической осью сферического зеркала. Главная оптическая ось выделена из всех других прямых, проходящих через оптический центр, только тем, что она является осью симметрии зеркала.

Сферические зеркала бывают вогнутыми и выпуклыми. Если на вогнутое сферическое зеркало падает пучок лучей, параллельный главной оптической оси, то после отражения от зеркала лучи пересекутся в точке, которая называется главным фокусом зеркала F. Расстояние от фокуса до полюса зеркала называют фокусным расстоянием и обозначают той же буквой F. У вогнутого сферического зеркала главный фокус действительный. Он расположен посередине между центром и полюсом зеркала.

Следует иметь в виду, что отраженные лучи пересекаются приблизительно в одной точке только в том случае, если падающий параллельный пучок был достаточно узким (так называемый параксиальный пучок).

Главный фокус выпуклого зеркала является мнимым. Если на выпуклое зеркало падает пучок лучей, параллельных главной оптической оси, то после отражения в фокусе пересекутся не сами лучи, а их продолжения.

Фокусным расстояниям сферических зеркал приписывается определенный знак: для вогнутого зеркала $F = \frac{R}{2}$, для выпуклого $F = -\frac{R}{2}$, где R – радиус кривизны зеркала.

Положение изображения и его размер можно также определить с помощью формулы сферического зеркала:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

здесь d – расстояние от предмета до зеркала, f – расстояние от зеркала до изображения.

Линейное увеличение сферического зеркала Γ определяется как отношение линейных размеров изображения h' и предмета h

$$\Gamma = \frac{h'}{h} = -\frac{f}{d}.$$

§ 4. Описание оптических систем

4.1. Элементы оптических систем

Оптическая система – это совокупность оптических сред, разделенных оптическими поверхностями, которые ограничиваются диафрагмами. Оптическая система предназначена для формирования изображения путем перераспределения в пространстве электромагнитного поля, исходящего из предмета (преобразование световых пучков).

Преобразование световых пучков в оптической системе происходит за счет ограничения пучков диафрагмой. Кроме того, пучки света могут преобразовываться за счет дифракции.

В наиболее общем случае оптическая система может состоять из следующих функциональных элементов:

- оптическая среда,
- оптическая поверхность,
- зеркала,
- диафрагмы,
- дифракционные оптические элементы.

Оптические среды – это прозрачные однородные среды с точным значением показателя преломления (с точностью до 4-6 знаков после запятой).

В качестве оптических сред в оптических системах в основном применяют:

- воздух (вакуум) ($n \approx 1$),
- оптические стекла – точно известны их показатели преломления и различные оптико-физические свойства ($n = 1,42 \div 2,0$),
- оптически кристаллы – работают в более широком диапазоне длин волн, чем стекла.

Оптические системы используются в широком интервале длин волн, поэтому важно знать показатели преломления стекол и кристаллов для разных длин волн. Дисперсия оптических материалов – это зависимость показателя преломления от длины волны. Она описывается дисперсионными формулами, называемыми формулами Зельмейера:

$$n^2 = 1 + \sum_{k=1}^{4-5} \frac{b_k}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \; n = a_1 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^4 + a_4\lambda^{-4} + a_6\lambda^{-6}.$$

Все стекла отличаются друг от друга характером зависимости показателя преломления от длины волны. Можно описывать оптические материалы либо значениями коэффициента дисперсионной формулы, либо непосредственно значениями коэффициентов дисперсионной формулы, либо непосредственно значениями показателя преломления для различных длин волн.

Оптические материалы могут работать только в определенном интервале длин волн, в пределах которого показатель преломления хорошо описывается дисперсионной формулой. Вблизи границ этого интервала зависимость показателя преломления сильно отличается от описанного дисперсионной формулой (показатель преломления либо резко убывает, либо резко увеличивается). Пограничные интервалы дли волн называются полюсами поглощения. У различных стекол эти полосы разные.

Основными характеристиками стекол являются показатель преломления для основной длины волны n_{λ_0} и общая дисперсия $n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2}$, где λ_1, λ_2 - наибольшая и наименьшая длины волн, которые пропускает стекло.

Еще одной важной характеристикой стекла является число Аббе (коэффициент относительной дисперсии): $v_e = \dfrac{n_e - 1}{n_{F'} - n_{C'}}$.

Чем меньше число Аббе, тем больше дисперсия, то есть сильнее зависимость показателя преломления от длины волны. По числу Аббе оптические стекла делят на две группы: кроны и флинты.

Комбинация стекол, принадлежащих различным группам, дает возможность создавать высококачественные оптические системы.

Оптическая поверхность – это гладкая регулярная поверхность точно известной формы.

Поверхности могут быть:

- плоские,
- сферические, параболические, эллиптические
- асферические (сложные).

Чаще всего в оптике используют плоские поверхности и сферические поверхности. Для сферических поверхностей задается один параметр поверхности – радиус кривизны R. Плоской поверхностью можно считать сферическую поверхность с радиусом кривизны равным бесконечности. Для плоскости $R=\infty$, но условно принято считать, что $R=0$.

Форма оптических поверхностей должна выдерживаться с точностью меньше длины волны. В идеальных оптических системах отклонения идеальной формы поверхности не должны превышать $0{,}1-0{,}02\lambda$, при этом допуск не зависит от размера поверхности.

Плоские и сферические поверхности изготавливаются достаточно просто (методом протирки), и поэтому именно их чаще всего используют в оптических системах. Асферические поверхности используют редко из-за сложности их изготовления и контроля, так как у них различная величина радиуса кривизны по различным направлениям. Получение точного профиля асферической поверхности возможно только методом ретуши.

Диафрагма – это металлический экран с круглым отверстием. На оптических схемах диафрагмы могут быть заданы явно – диафрагма является элементом оптической системы, или неявно – роль диафрагмы играет край или оправа линзы (рис. 3) [7].

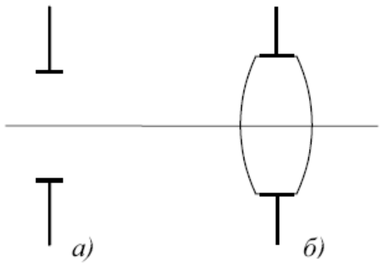

Рис. 3. Диафрагмы

4.2. Взаимное расположение элементов в оптической системе

Центрированная оптическая система – это оптическая система, которая имеет ось симметрии (оптическую ось) и сохраняет все свои свойства при вращении вокруг этой оси.

Для центрированной оптической системы должны выполнятся следующие условия:

• все плоские поверхности перпендикулярны оси,

• центры всех сферических поверхностей принадлежат оси,

• все диафрагмы круглые, центры всех диафрагм принадлежат оси,

• все среды либо однородны, либо распределение показателя преломления симметрично относительно оси.

Центрированные оптические системы могут включать в себя плоские зеркала и отражающие призмы, ломающие оптическую ось (рис.4), но, по сути, не влияющие на симметрию системы.

Нумерация элементов оптической системы ведется по ходу луча (рис.5). Все расстояния между поверхностями (толщины линз или воздушные промежутки) откладываются по оси.

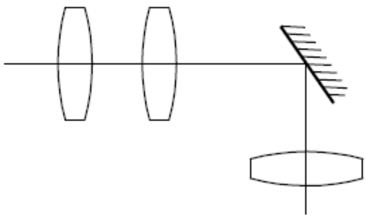

Рис. 4. *Центрированная оптическая система с изломом оптической оси*

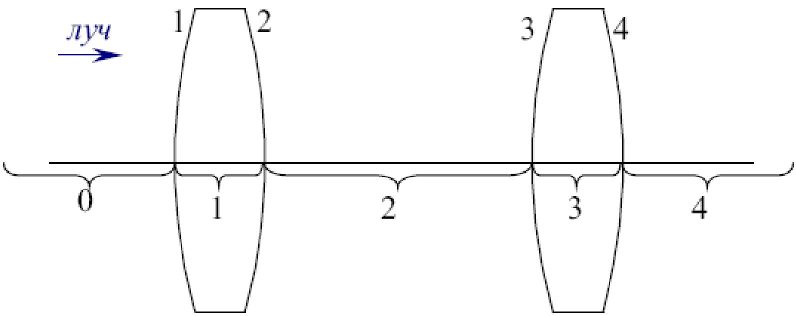

Рис. 5. *Нумерация элементов оптической системы*

4.3. Правила знаков

Для удобства чтения оптических схем и расчетов в оптике приняты единые правила знаков (рис. 6).

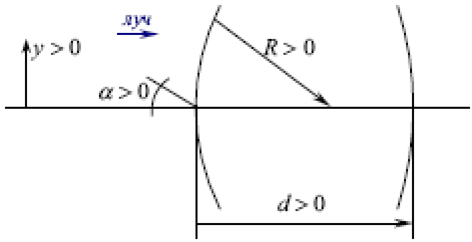

Рис. 6. *Правила знаков*

Положительным направлением света считается распространение слева на право.

Осевые расстояния между преломляющими поверхностями считаются положительными, если они измеряются по направлению распространения света (слева на право).

Радиус кривизны поверхности считается положительным, если центр кривизны находится справа от поверхности (поверхность обращена выпуклостью влево).

Угол между лучом и оптической осью считается положительным, если для совмещения оси с лучом ось нужно вращать по часовой стрелке.

Отрезки, перпендикулярные оптической оси считаются положительными, если они располагаются над осью.

Луч может пройти одну и ту же поверхность несколько раз (рис.7), поэтому физическое и расчетное число поверхностей может различаться.

По составу оптические системы делятся на:

- линзовые (нет зеркал, кроме плоских для излома оптической оси),
- зеркальные,
- зеркально-линзовые.

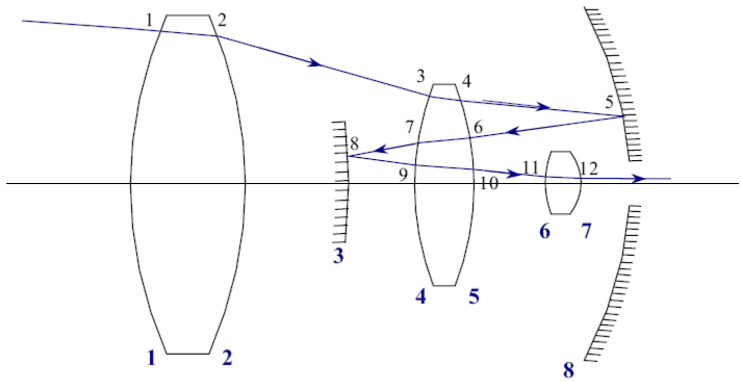

Рис. 7. *Физические и расчетные поверхности*

При анализе оптических систем используются понятия меридиональной и сагиттальной плоскости. Меридиональная плоскость – это плоскость, проходящая через оптическую ось.

Сагиттальная плоскость – это плоскость, содержащая луч и перпендикулярная меридиональной плоскости.

4.4. Предмет и изображение в оптической систем

Оптические системы в основном предназначены для формирования изображения (изображающие оптические системы). Для таких систем вводится понятие предмета и изображения. Для оптических систем, не строящих изображение, понятие предмета и изображения вводится условно.

В геометрической оптике предмет – это совокупность точек, из которых выходят лучи, попадающие оптическую систему.

Из каждой точки предмета выходит гомоцентрический пучок лучей. Вся возможная совокупность точек (от $-\infty$ до $+\infty$) образуется пространство предметов. Пространство предметов может быть действительным или мнимым.

Оптическая система делит все пространства на две части: пространство предметов и пространство изображений.

Плоскость предметов и плоскость изображений – это плоскости, перпендикулярные оптической оси и проходящие через предмет и изображение.

В геометрической оптике любой точке пространства предметов можно поставить в соответствие сопряженную ей точку в пространстве изображений. Если из некоторой точки в пространстве предметов выходят лучи и эти лучи затем пересекаются в пространстве изображений в какой-либо точке, то эти две точки называются сопряженные.

Сопряженные линии – это линии, дл которых каждая точка линии в пространстве предметов сопряжена с каждой соответствующей точкой линии в пространстве изображений (для идеальных оптических систем).

В реальных оптических системах лучи, выходящие из точки А. только приближенно сходящиеся в точке A'. Для идеальных оптических систем каждой точке пространства предметов обязательно соответствует идеально сопряженная ей точка в пространстве изображений.

Существует два типа предмета и изображения:

Ближний тип – предмет (изображение) расположены на конечном расстоянии, поперечные размеры измеряются в единицах длины.

Дальний тип – предмет (изображение) расположены в бесконечности, поперечные размеры выражены в угловой мере.

Термины «конечное расстояние» и «бесконечность» достаточно условны и просто соответствуют более или менее близкому расположению предмета (изображения) по отношению к оптической системе.

§ 5. Теория идеальных оптических систем

В параксиальной области, любая реальная система ведет себя как идеальная:

- Каждой точке пространства предметов можно поставить в соответствие сопряженную ей точку в пространстве изображений.
- Каждая прямая линия имеет сопряженную ей прямую линию в пространстве изображений.
- Каждая плоскость пространства предметов имеет сопряженную ей плоскость в пространстве изображений.

Из этих положений следует, что:

- Меридиональная плоскость имеет сопряженную ей меридиональную плоскость в пространстве изображений.
- Плоскость в пространстве предметов, перпендикулярна оптической оси, имеет сопряженную ей плоскость, перпендикулярную оптической оси в пространстве изображений.

5.1. Линейное, угловое, продольное увеличение

Линейное увеличение оптической системы (рис. 8) – это отношение линейного размера изображения в направлении, перпендикулярном оптической оси, к соответствующему размеру предмета в направлении перпендикулярном оптической оси: $\beta = \dfrac{y'}{y}$.

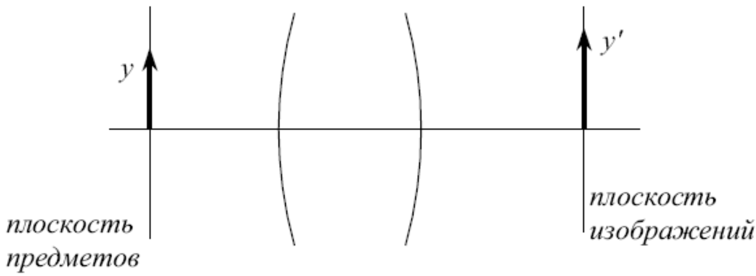

Рис. 8. *Сопряженные линейные величины*

Если $\beta > 0$, то отрезки y и y' направлены в одну сторону, если $\beta < 1$, то отрезки y и y' направлены в разные стороны, то есть происходит оборачивание изображения.

Если $|\beta| > 1$, то величина изображения больше величины предмета, если $|\beta| < 1$, то величина изображения меньше величин предмета.

Для идеальной оптической системы линейное увеличение для любой величины предмета и изображения в одних и тех же плоскостях одно и тоже.

Угловое увеличение оптической системы – это отношение тангенса угла лучом и оптической осью в пространстве изображений к тангенсу угла между сопряженным с ним лучом в пространстве предметов и осью: $W = \dfrac{tg\alpha'}{tg\alpha}$.

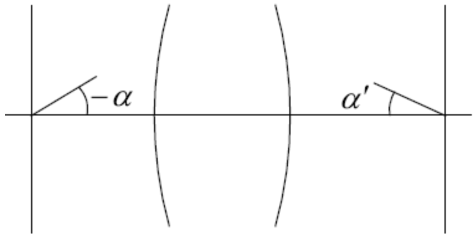

Рис. 9. *Сопряженные угловые величины*

В параксиальной области углы малы, и, следовательно, угловое увеличение (рис.9) – это отношение любых из следующих угловых величин: $W = \dfrac{tg\alpha'}{tg\alpha} = \dfrac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$.

Продольное увеличение оптической системы (рис.10) – это отношение бесконечно малого отрезка, взятого вдоль оптической оси в пространстве изображений, к сопряженному с ним отрезку в пространстве предметов: $Q = \dfrac{l'}{l}$.

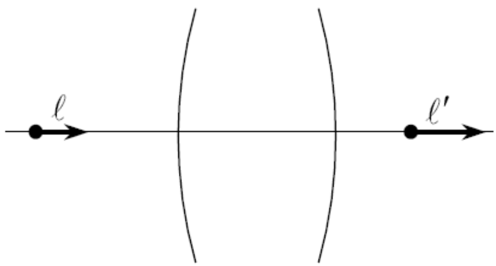

Рис. 10. *Сопряженные продольные отрезки*

5.2. Кардинальные точки и отрезки

Главными плоскостями системы называется пара сопряженных плоскостей, в которых линейное увеличение равно единице ($\beta = 1$).

Главные точки H и H' (рис. 11) – это точки пересечения главных плоскостей с оптической осью.

Рассмотрим случай, когда линейное увеличение равно нулю, или бесконечности. Отодвинем плоскость предметов бесконечно далеко от оптической системы. Сопряженная ей плоскость называется задней фокальной плоскостью, точка пересечения этой плоскости с оптической осью – задний фокус F'.

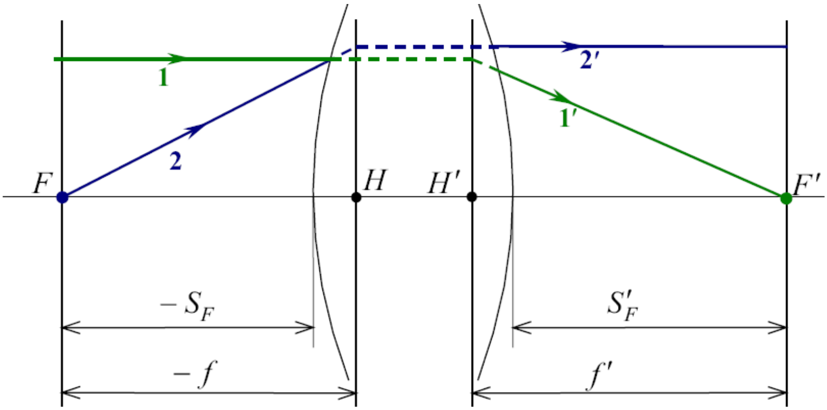

Рис. 11. *Кардинальные точки и отрезки*

Расстояние от задней главной точки до заднего фокуса называется задним фокусным расстоянием f'.

Расстояние от последней поверхности до заднего фокуса называется задним фокальным отрезком $S'_{F'}$.

Передний фокус F – это точка на оптической оси в пространстве предметов, сопряженных с бесконечно удаленной точкой, расположенной на оптической оси в пространстве изображений.

Если лучи выходят из переднего фокуса, то они идут в пространстве изображений параллельно.

Переднее фокусное расстояние f – это расстояние от передней главной точки до переднего фокуса.

Передний фокальный отрезок S_F – это расстояние от первой поверхности до переднего фокуса.

Если $f'>0$, то система называется собирающей или положительной. Если $f'<0$, то система рассеивающая или отрицательная.

Переднее и заднее фокусные расстояния не являются абсолютно независимыми, они связаны между собой соотношением: $\frac{f'}{f}=-\frac{n'}{n}$.

Выражение $\frac{f'}{f}=-\frac{n'}{n}$ можно переписать в виде: $\frac{f'}{n'}=-\frac{f}{n}$, где $\frac{f'}{n'}$ – приведенное или эквивалентное фокусное расстояние.

В том случае, если оптическая система находится в однородной среде $n=n'$, следовательно, переднее и заднее фокусные расстояния равны по абсолютной величине $|f|=|f'|$.

Оптическая сила оптической системы: $\Phi=\frac{n'}{f'}=-\frac{n}{f}$.

Чем больше оптическая сила, тем сильнее оптическая система изменяется ход лучей. Если $\Phi=0$ то $f'=\infty$.

§ 6. АБЕРРАЦИИ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В идеальной оптической системе все лучи, исходящие из точки A (рис. 12), пересекаются в сопряженной с ней точке A_0. После прохождения реальной оптической системы либо нарушается гомоцентричность пучка и лучи не имеют общей точки пересечения, либо гомоцентричность сохраняется, но лучи пересекаются в некоторой точке A', которая не совпадает с точкой идеального изображения. Это является следствием аберраций. Основная задача расчета оптических систем – устранение аберраций.

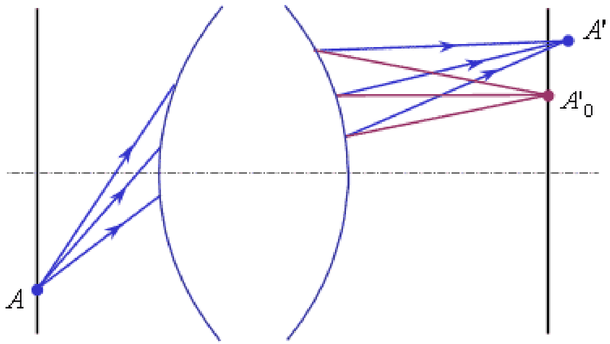

Рис. 12. *Идеальное и реальное изображение точки*

Для вычисления аберраций необходимо определить точку референтного (идеального) изображения A'_0, в которой должно находиться изображение по законам гауссовой оптики. Относительно этой точки и определяют аберрации.

Поперечные аберрации $(\Delta x', \Delta y')$ (рис. 13) – это отклонения координат точки A' пересечения реального луча с плоскостью изображения от координат точки A'_0 идеального изображения в направлении, перпендикулярном оптической оси:

$$\Delta x' = x'_0 - x',$$

$$\Delta y' = y'_0 - y'.$$

Если точки A' и A'_0 совпадают, то поперечные аберрации равны нулю $(\Delta x' = 0,\ \Delta y' = 0)$.

Различают поперечные аберрации в сагиттальной плоскости $(\Delta x')$ и в меридиональной плоскости $(\Delta y')$. Поперечные аберрации для изображения ближнего типа выражаются в миллиметрах, для изображения дальнего типа – в угловой мере. Для изображения дальнего типа поперечная аберрация – это угловое отклонение $\Delta\sigma'$ между реальным и идеальным лучом (рис. 14).

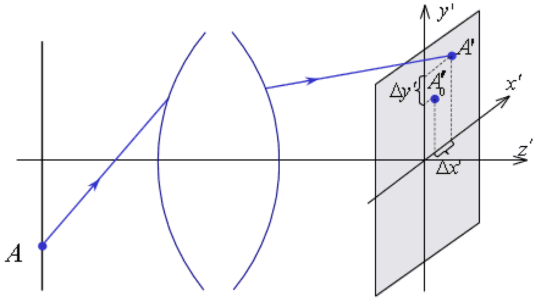

Рис. 13. *Поперечные аберрации*

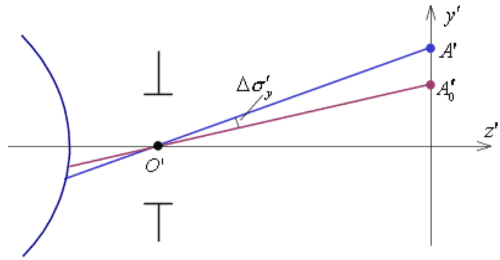

Рис. 14. *Поперечные аберрации для удаленного изображения*

У каждого луча в пучке своя величина поперечной аберрации. Для всего пучка поперечные аберрации – это функции от зрачковых координат:

$$\Delta x' = \Delta x'\left(P_x, P_y\right),$$

$$\Delta y' = \Delta y'\left(P_x, P_y\right),$$

где $\left(P_x, P_y\right)$ – реальные зрачковые координаты.

Зрачковые координаты определяют положение луча в пучке. Канонические (относительные) зрачковые координаты определяются следующим образом:

$$\rho_x = \frac{P_x}{A_x} = \frac{P'_x}{A'_x}, \ \rho_y = \frac{P_y}{A_y} = \frac{P'_y}{A'_y},$$

где (P_x, P_y), (P'_x, P'_y) – входные и выходные реальные зрачковые координаты, (A_x, A_y), (A'_x, A'_y) – входные и выходные апертуры. Апертуры определяют максимальные значения зрачковых координат (рис.15).

Таким образом, верхний луч пучка имеет координаты $\rho_x = 0,\ \rho_y = 1$, нижний луч пучка – $\rho_x = 0,\ \rho_y = -1$, главный луч пучка – $\rho_x = \rho_y = 0$, сагиттальный луч – $\rho_x = 1,\ \rho_y = 0$.

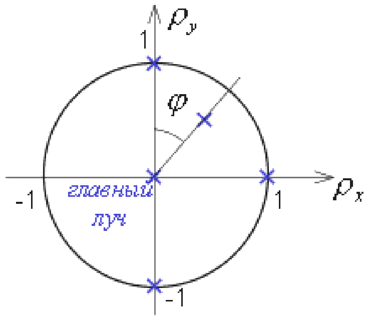

Рис. 15. *Канонические зрачковые координаты*

Канонические зрачковые координаты можно выразить через полярные координаты ρ и φ:

$$\rho_x = \rho \sin\varphi,$$

$$\rho_y = \rho \cos\varphi,$$

где $\rho = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2}$.

Волновая аберрация (рис.16) – это отклонение реального волнового фронта от идеального, измеренное вдоль луча в количестве длин волн:

$$W = \frac{\Delta l' \cdot n'}{\lambda}.$$

Из выражения $W = \dfrac{\Delta l' \cdot n'}{\lambda}$ следует, что волновая аберрация пропорциональна отклонениям оптических длин лучей пучка. Поэтому влияние волновой аберрации на качество изображения не зависит от типа изображения, а определяется тем, сколько длин волн она составляет.

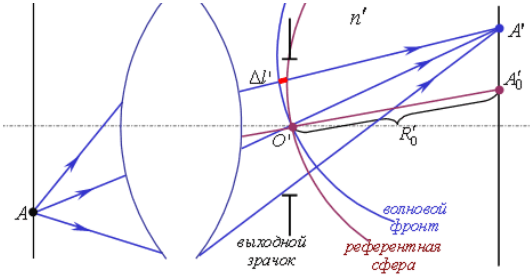

Рис. 16. *Волновая аберрация*

Референтная сфера – это волновой фронт идеального пучка с центром в точке идеального изображения A'_0, проходящий через центр выходного зрачка O'. При нахождении волновой аберрации с референтной сферой сравнивается ближайший к ней волновой фронт.

Для всего пучка волновая аберрация – это функция канонических зрачковых координат:

$$W = W\left(\rho_x, \rho_y\right).$$

Поперечная и волновая аберрации – это разные формы представления одного явления, они связаны между собой соотношениями:

$$\Delta x' = -\frac{\lambda}{A_x} \cdot \frac{\partial W}{\partial \rho_x},$$

$$\Delta y' = -\frac{\lambda}{A_y} \cdot \frac{\partial W}{\partial \rho_y}.$$

Таким образом, поперечные аберрации прямо пропорциональны первым частным производным волновой аберрации по каноническим координатам.

Продольные аберрации – это отклонения координаты точки O'' пересечения реального луча с осью от координаты точки O' идеального изображения вдоль оси:

$$\Delta S' = S' - S'_0,$$

где S' – положение точки пересечения луча с осью, S'_0 – положение идеальной точки пересечения.

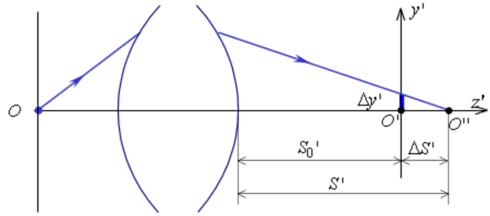

Рис. 17. *Продольные аберрации осевого пучка для изображения ближнего типа*

Для изображения ближнего типа (рис. 17) продольные аберрации выражаются в миллиметрах, для изображения дальнего типа (рис.18) продольные аберрации выражаются в обратных миллиметрах: $\Delta S' = \frac{1}{z'_0} - \frac{1}{z'}[\textit{кдптр}]$.

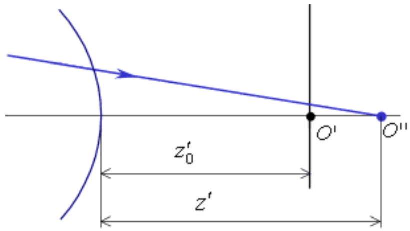

Рис. 18. *Продольные аберрации осевого пучка для изображения дальнего типа*

Продольные аберрации связаны с поперечными, и, следовательно, с волновыми тоже:

$$\Delta S' \approx \frac{\lambda}{A'^2_0} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial W}{\partial \rho},$$

где A'_0 – задняя апертура осевого пучка.

Выражение $\Delta S' \approx \frac{\lambda}{A'^2_0} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial W}{\partial \rho}$ приближенное, оно может использоваться только для случая небольших апертур.

Итак, из выражений $\Delta x' = -\frac{\lambda}{A_x} \cdot \frac{\partial W}{\partial \rho_x}$, $\Delta y' = -\frac{\lambda}{A_y} \cdot \frac{\partial W}{\partial \rho_y}$ и $\Delta S' \approx \frac{\lambda}{A'^2_0} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial W}{\partial \rho}$ следует, что волновая, поперечная и продольная аберрация – это разные формы представления одного явления нарушения гомоцентричности пучков. При оценке качества изображения за исходную модель аберрационных свойств оптической системы берут волновую аберрацию (по величине волновой аберрации судят о качестве оптической системы). Однако, если аберрации велики, то более целесообразно использовать для оценки качества изображения поперечные аберрации.

§ 7. Построение изображений в оптических системах

Для определения положения точки изображения необходимо из сопряженной точки предмета в оптическую систему направить два луча. В месте их пересечения по выходе из системы и будет располагаться точка изображения. Оптическая система располагается в однородной среде и показывается в виде главных плоскостей.

Для нахождения положения изображения применяют несколько приемов.

Прием первый. Из точки предмета вне оптической оси в оптическую систему направляют два луча (рис.19). Первый луч направляется параллельно оптической оси. Этот луч по выходе из системы должен пройти через точку заднего фокуса. Второй луч направляется через точку заднего фокуса. Второй луч направляется через точку переднего фокуса. По выходе из системы этот луч должен пойти параллельно оптической оси. Предмет *l* расположен перед отрицательной (рассеивающей) линзой. Каждый луч входит в линзу на передней главной плоскости на определенной высоте и на такой же высоте выходит из задней главной плоскости, так как линейное увеличение в главных плоскостях равно единице. В пространстве изображений пересекаются только продолжения вышедших лучей. Из точки пересечения продолжений вышедших лучей. Из точки пересечения продолжений лучей опустим нормаль на оптическую ось, которая и будет мнимым уменьшенным изображением.

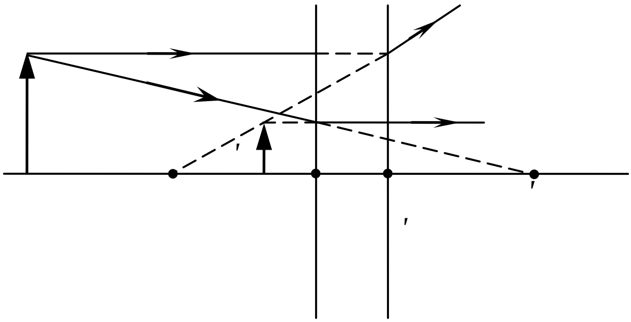

Рис. 19. *Первый прием нахождения положения изображения*

Прием второй. Из точки предмета вне оптической оси в систему также направляются два луча и один из них направляется параллельно оптической оси, а другой направляется в переднюю главную точку (рис.20). Здесь используется свойство главных точек оптической системы, расположенной в однородной среде, образующих одинаковые углы луча с осью ($\gamma = +1$).

Предмет расположен за положительной системой. В точку В из пространства предметов (слева направо) направляются два луча – один из них идет параллельно оптической оси, а второй направляется через переднюю главную точку. Получили действительное и уменьшенное изображение.

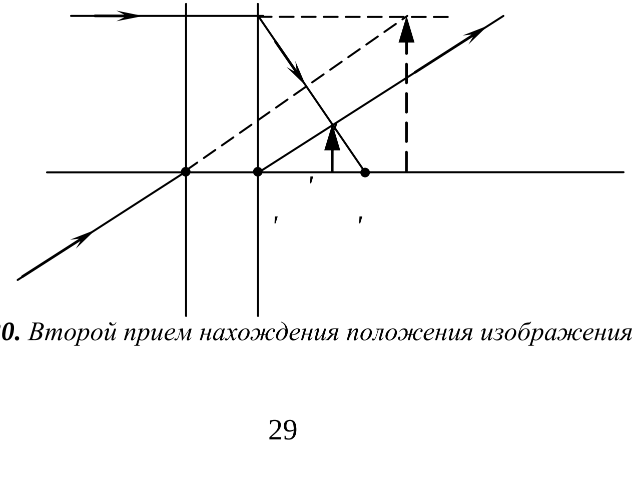

Рис. 20. *Второй прием нахождения положения изображения*

Прием третий. Из точки предмета вне оптической оси в систему направляются два луча – один из них направляется в переднюю главную точку, а другой – в передний фокус (рис. 21). Предмет l расположен в заднем фокусе отрицательной линзы. Лучи, вышедшие из точки B, после преломления в линзе образуют изображение l'. Изображение получилось мнимое и уменьшенное.

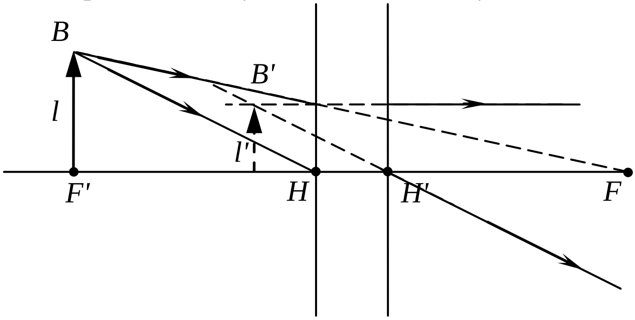

Рис. 21. *Третий прием нахождения положения изображения*

§ 8. Основные соотношения параксиальной оптики

Основные соотношения параксиальной оптики связывают между собой фокусные расстояния, положение и размеры предмета и изображения, угловое, линейное и продольное увеличение.

8.1. Вывод зависимости между положением и размером предмета и изображения

Для вывода зависимости между положением и размером предмета и изображения необходимо воспользоваться рис.22 [9]. ΔOAF подобен ΔFHK_2, следовательно:

$$\frac{y}{-y} = \frac{-z}{f'}, \text{ отсюда } \frac{y}{y} = -\frac{f}{z}.$$

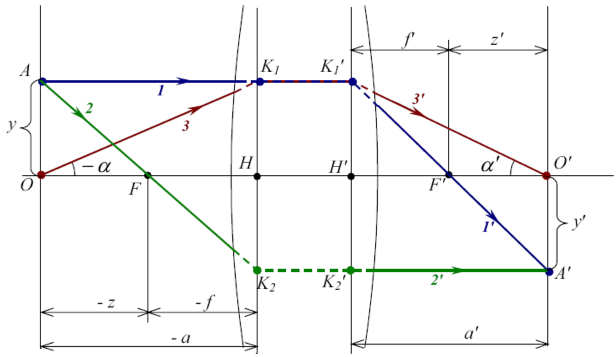

Рис. 22. *Схема для вывода основных соотношений параксиальной оптики*

Тогда, в соответствии с выражением $\beta = \frac{y'}{y}$, линейное увеличение можно выразить следующим образом:

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{z}.$$

Аналогично, из подобия треугольников $\Delta H'K_1'F'$ и $\Delta F'O'A'$ можно получить выражение:

$$\beta = -\frac{z'}{f'}.$$

Таким образом, увеличение можно выразить как через передние, так и через задние отрезки. Отсюда можно получить формулу Ньютона:

$$z \cdot z' = f \cdot f'.$$

Если оптическая система находится в однородной среде $(n = n')$, то $f = -f'$, и формула Ньютона получает вид:

$$z \cdot z' = -f'^2.$$

Выразим z и z' через фокусные расстояния и передний $(-a)$ и задний (a') отрезки:

$$z' = a' = f',$$

$$z = a - f\ .$$

Тогда выражение $z \cdot z' = f \cdot f'$ можно записать в виде:

$$(a - f)(a' - f') = f \cdot f'.$$

После преобразования получим выражение, связывающее фокусные расстояния и передний и задний отрезки (формула отрезки или формула Гаусса):

$$\frac{f'}{a'} + \frac{f}{a} = 1.$$

8.2. Уголковое увеличение и узловые точки

Теперь рассмотрим угловое увеличение.

Из ΔOK_1H , видно, что:

$$tg(-a) = \frac{y}{-a} = \alpha \text{, отсюда } -\alpha = \frac{y}{-a}.$$

Аналогично можно вывести выражение:

$$\alpha' = \frac{y}{a'}.$$

Теперь можно выразить уголковое увеличение через передний и задний отрезки:

$$W = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{y \cdot a}{y \cdot a'} = \frac{a}{a'} = \frac{f + z}{f' + z'}.$$

Выразим z' из формулы Ньютона, тогда после преобразований получим выражение для вычисления углового увеличения:

$$W = \frac{z}{f'} = \frac{f}{z'}.$$

Из выражения $W = \frac{z}{f'} = \frac{f}{z'}$ следует, что если выбрать плоскости предмета и изображения таким образом, что $z = f'$ и $z' = f$, то в точках пересечения этих плоскостей с осью угловое увеличение равно единице. Такие точки называются узловыми точками [9].

Чтобы найти узловые точки N и N' (рис.23), от переднего фокуса откладывается заднее фокусное расстояние. Отрезки NN' и HH' равны. Если $-f'=f$ $\left(n=n'\right)$, то узловые точки совпадают с главными.

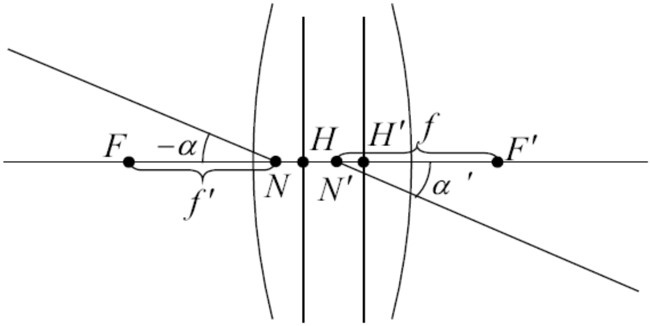

Рис. 23 *Узловые точки*

Следствием выражений $\beta=-\frac{z'}{f'}$ и $W=\frac{z}{f'}=\frac{f}{z'}$ является следующее отношение:

$$\beta\cdot W=-\frac{f}{f'}=\frac{n}{n'}.$$

8.3. Частные случаи положения предмета и изображения

Рассмотрим различные положения предмета и изображения (различные z и z'):

- $z=-f$. Тогда $z'=-f'$, линейное увеличение $\beta=1$, следовательно, предмет и изображение – это главные плоскости. Угловое увеличение $W=-\frac{f}{f'}=\frac{n}{n'}$.

- $z = f'$. Тогда $z' = f$, угловое увеличение $W = 1$, следовательно, предмет и изображение – это узловые точки. Линейное увеличение $\beta = -\dfrac{f}{f'} = \dfrac{n}{n'}$.
- $z = f$. Тогда $z' = f'$, линейное увеличение $\beta = -1$, угловое увеличение $W = \dfrac{f}{f'} = -\dfrac{n}{n'}$, следовательно, предмет находится на двойном фокусном расстоянии, то есть расстояние между предметом и изображением минимально.
- $z = 0$. Тогда $z' = \infty$, линейное увеличение $\beta = -\infty$, угловое увеличение $W = 0$, следовательно, предмет находится в переднем фокусе, а изображение – в бесконечности.
- $z' = 0$. Тогда $z = -\infty$, линейное увеличение $\beta = 0$, угловое увеличение $W = \infty$, следовательно, предмет находится на бесконечности, а изображение – в заднем фокусе.

8.4. Связь продольного увеличения с поперечным и угловым

Рассмотрим рис. 24. Длину отрезков l и l' можно выразить следующим образом:

$$l = z_1 - z\,,\; l' = z' - z_1'.$$

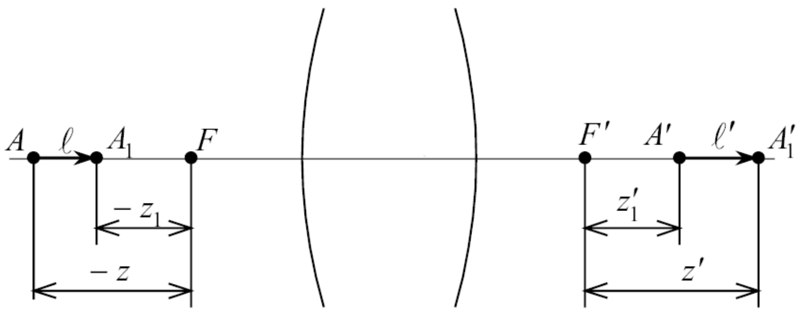

Рис. 24 *Связь продольного увеличения с поперечным и угловым*

По определению продольного увеличения:

$$Q = \frac{l}{l'} = \frac{z' - z_1'}{z_1 - z}.$$

После преобразований, с учетом выражений $\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{z}$ и $\beta = -\frac{z'}{f'}$, получим:

$$Q = -\frac{f'}{f} \cdot \beta \cdot \beta_1,$$

где β и β_1 - поперечное (линейное) увеличение в точках A' и A_1'.

Или, с учетом выражения $\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$:

$$Q = \frac{n'}{n} \cdot \beta \cdot \beta_1.$$

Теперь рассмотрим продольное увеличение для бесконечно малых отрезков $(l \to 0, l' \to 0)$ (по определению это и есть продольное увеличение). В этом случае линейное увеличение в точках A' и A_1' будет одинаковым, следовательно:

$$\underset{t \to 0}{Q} = \frac{n'}{n} \cdot \beta^2 = \frac{f'}{f} \cdot \beta^2.$$

Из выражения $\beta \cdot W = -\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'}$ можно получить:

$$W = -\frac{f}{f'} \cdot \beta^{-1} = \frac{n}{n'} \cdot \beta^{-1}.$$

Если оптическая система находится в однородной среде $(n' = n)$, то:

$$Q = \beta^2,\ W = \beta^{-1}.$$

То есть продольное увеличение равно квадрату линейного увеличения, а угловое обратно пропорционально ему [9].

8.5. Диоптрическое исчисление

Диоптрическое исчисление – это измерение продольных отрезков в обратных единицах (диоптриях):

$$D = \left(\frac{a}{n}\right)^{-1} [\partial nmp],$$

где $\frac{a}{n}$ – приведенная длина.

Одна диоптрия соответствует приведенному отрезку в 1 м. Если отрезок измеряется в мм, то обратный отрезок измеряется в килодиоптриях.

Используя формулу отрезков $\beta = -\frac{z'}{f'}$ и выражение $\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$ можно получить важное соотношение для приведенных отрезков в пространстве предметов и изображений и оптической силы, измеряемых в диоптриях:

$$\frac{n'}{a'} = \frac{n}{a} + \frac{n'}{f'}.$$

или

$$D' = D + \Phi,$$

где D и D' – приведенные передний и задний отрезки в диоптриях. То есть оптическая система увеличивает приведенный отрезок в пространстве изображений (в *дптр*) на величину оптической силы.

8.6. Инвариант Лагранжа-Гельмгольца

Инвариант Лагранжа-Гельмгольца связывает линейный размер предмета и угловой размер пучка лучей. Эта величина инварианта, то есть неизменна в любом пространстве.

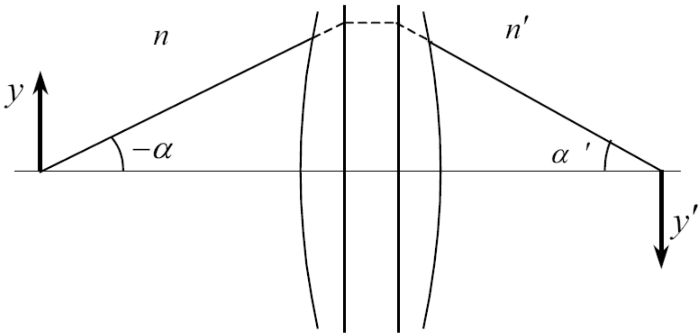

Рис. 25 *Величины, которые связывает инвариант Лагранжа-Гельмгольца*

Для вывода этого инварианта воспользуемся выражением $\beta \cdot W = -\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'}$, связывающим угловое и линейное увеличения [9]. Тогда воспользовавшись выражениями $\beta = \frac{y'}{y}$ и $W = \frac{\alpha'}{\alpha}$ (рис.25), определяющим линейное и угловое увеличения, получим следующее соотношение:

$$\frac{\alpha' \cdot y'}{\alpha \cdot y} = \frac{n}{n'}.$$

Выражение $\frac{\alpha' \cdot y'}{\alpha \cdot y} = \frac{n}{n'}$ можно преобразовать, и тогда получим инвариант Лагранжа-Гельмгольца:

$$\alpha \cdot y \cdot n = \alpha' \cdot y' \cdot n'.$$

Инвариант Лагранжа-Гельмгольца характеризует информационную емкость оптической системы, то есть величину пространства, которое может быть отображено оптической системой. Этот инвариант математически выражает закон сохранения информации в геометрической оптике.

ГЛАВА II. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

1. Параллельный пучок света падает на систему линз *Л*$_1$ и *Л*$_2$, оптические центры которых лежат на прямой *OO*, под малым углом α=0,2 *рад* к главной оптической оси линзы *Л*$_1$ (рис. 26).

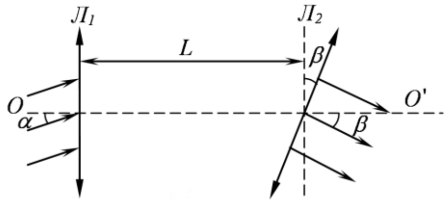

Рис. 26

Линза *Л*$_2$ повернута на малый угол β = 0,1 *рад* относительно плоскости линзы *Л*$_1$. Оказалось, что падающий пучок света, пройдя через систему линз, отклонится на малый угол β = 0,1 *рад* относительно оси *OO'*. Определить фокусные расстояния линз F_1 и F_2. Если расстояние между оптическими центрами линз L = 10 *см*.

Решение.

Пусть F_1 и F_2 – фокусные расстояния линз *Л*$_1$ и *Л*$_2$. После прохождения линзы *Л*$_1$ пучок соберется в фокальной плоскости *BD* линзы *Л*$_1$ в точке *B* (рис.27).

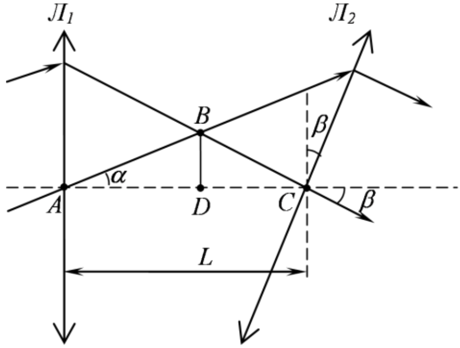

Рис. 27

Поэтому $AD=F_1$. Поскольку из линзы $Л_2$ пучок выходит параллельно ее главной оптической оси, то точка B должна быть фокусом линзы $Л_2$ и лежать на ее главной оптической оси т.е. $DC=F_2$. Из треугольника ABC по теореме синусов

$$\frac{F_2}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\beta} = \frac{L}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)}.$$

При малых углах α и β справедливо:

$$\sin\alpha \approx \alpha, \ \sin\beta \approx \beta, \ \sin(180^\circ - \alpha - \beta) \approx \alpha + \beta, \ AB \approx F_1.$$

Тогда

$$\frac{F_2}{\alpha} \approx \frac{F_2}{\beta} \approx \frac{L}{\alpha + \beta}.$$

Отсюда

$$F_1 \approx \frac{L\beta}{\alpha + \beta} \approx 3{,}3\,см,$$

$$F_2 \approx \frac{L\alpha}{\alpha + \beta} \approx 6{,}7\,см.$$

2. Луч света падает на оптическую систему по малым углом α к ее оптической оси OO'. Оптическая система включает в себя рассеивающую линзу с фокусным расстоянием F (F>0) угловой отражатель, состоящий из двух плоских взаимно перпендикулярных зеркал. Отражатель расположен симметрично относительно оптической оси (рис. 28).

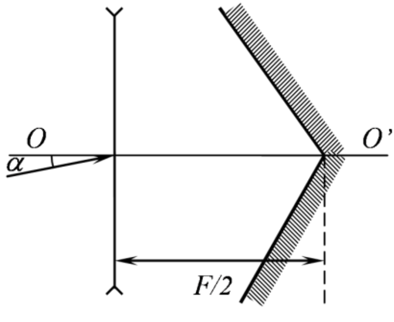

Рис. 28

Луч, отраженный от двух зеркал уголка, выходит из линзы под углом малым углом β к оптической оси. Найти этот угол, если падающий луч проходит через оптический центр линзы, а расстоянии от линзы до уголкового отражателя $L = F/2$.

Решение:

Можно показать, что любой упавший на уголковый отражатель луч SA и отраженный от двух зеркал луч BK параллельны. У нас луч SA идет под углом α к оси OO'. Следовательно, луч BK идет тоже под углом α к оси OO' (рис.29).

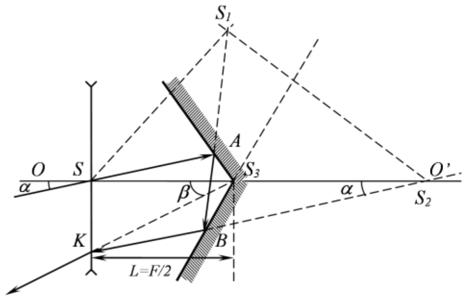

Рис. 29

Удобно на падающем луче взять точку S. Тогда S_1 – изображение от S в верхнем зеркале, а S_2 – изображение в отражателе, причем $SS_2 = 2L = F$. Теперь S_2 для линзы – источник, его изображение S_3 в линзе будет мнимым на расстоянии $F/2$ от линзы, т.е. попадает случайно в вершину отражателя. Продолжение вышедшего из линзы луча проходит через точку S_3 (Рис.29).

Из треугольников SS_3K и SS_2K

$$SK = \frac{F}{2} tg\beta,$$

$$SK = SS_2 tg\alpha.$$

Поскольку $SS_2 = F$, то $tg\beta = 2tg\alpha$. С учетом малости углов α и β получаем $\beta \approx 2\alpha$.

3. За тонкой собирающей линзой с фокусным расстоянием F=10 см поместили плоское зеркало, перпендикулярное главной оптической оси линзы. При расположении предмета на расстоянии

$d=F/2$ перед линзой ближайший к предмету фокус линзы оказался посередине между предметом и его изображением в системе линза-зеркало-линза. Найдите расстояние от линзы до зеркала.

Решение:

Обозначим через L расстояние от линзы до зеркала. В линзе первое изображение S_1 от предмета S получается мнимым и попадает в фокус. S_1 является действительным предметом для зеркала. S_2 – мнимое изображение в зеркале предмета S_1 и служит предметом для линзы. S_3 – второе изображение в линзе (окончательное изображение в системе) предмета S_2 (рис. 30).

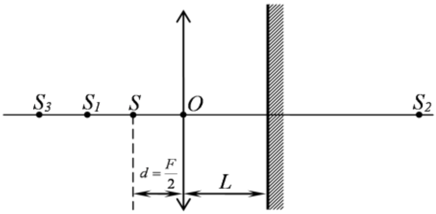

Рис. 30

Из условия задачи следует, что $S_3O = \frac{3}{2}F$.

По формуле линзы

$$\frac{1}{{}^{3}\!/\!{}_{2}F} + \frac{1}{SO_2} = \frac{1}{F}.$$

Отсюда $OS_2 = 3F$. Так как зеркало должно находиться посередине между S_1 и S_2, то

$$F + L = 3F - L.$$

Отсюда $L = F = 10\,см$.

4. Собирающая линза, радиусы кривизны поверхности которой R_1 = 15 *см* и R_2 = 25 *см*, дает действительное изображение предмета на расстоянии 50 *см* от линзы, если предмет находится на расстоянии 0,25 *м* от линзы. Найти показатель преломления материала линзы и ее оптическую силу. Линза находится в воздухе.

Решение:

Найдем фокусное расстояние линзы, используя формулу линзы:

$$F = \frac{d \cdot f}{f + d}.$$

С другой стороны, зная геометрию линзы, можно записать:

$$\frac{1}{F} = \left(\frac{n_л}{n_{ср}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Оптическая сила линзы

$$D = \frac{1}{F} = \frac{f + d}{d \cdot f},$$

$$D = \frac{0,5 + 0,25}{0,5 \cdot 0,25} дптр = 6 \, дптр.$$

Приравнивая выражения для $\frac{1}{F}$, получим

$$n_л = n_{ср} \left[1 + \frac{(f + d) \cdot R_1 \cdot R_2}{d \cdot f \cdot (R_1 + R_2)} \right],$$

$$n_л = 1 \cdot \left[1 + \frac{(0,5 + 0,25) \cdot 0,15 \cdot 0,25}{0,5 \cdot 0,25 \cdot (0,15 + 0,25)} \right] = 1,56$$

5. В фокусе собирающей линзы находится предмет. Постойте изображение предмета, если за линзой перпендикулярно главной оптической оси находится плоское зеркало.

Решение:

От каждой точки предмета идут лучи, которые после преломления образуют параллельные потоки. После отражения от зеркала каждый из параллельных потоков, снова пройдя через линзу, собирается в некоторой точке фокальной плоскости.

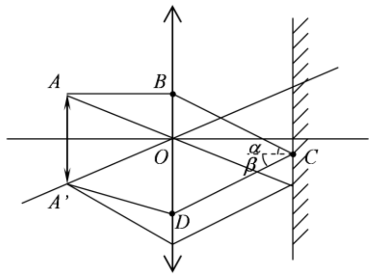

Рис. 31

Например, луч *AB* после преломления идет через фокус и попадает на зеркало в точке *C*. Поскольку $\alpha = \beta$, луч, отражаясь, идет к линзе по *CD*. Проведя побочную оптическую ось, найдем точку A' пересечения преломленного луча *CD* с фокальной плоскостью. В эту же точку попадет луч *OA*, отразившись от зеркала и преломившись в линзе. Треугольник AOA' равнобедренный (рис.31). Следовательно, линейные размер изображения равны размерам предмета.

6. Собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 20 см$ состоит из двух половинок. Определите расстояние между изображениями точечного источника, если половинки раздвинуть:

1) на расстояние $d_0 = 1 см$ перпендикулярно главной оптической оси;

2) на то же расстояние одна из половинок линзы сдвигается от источника вдоль оптической оси.

3) источник расположен на расстоянии $d = 75 см$ от линзы.

Решение:

Положение изображения не зависит от того, получается ли оно с помощью целой линзы или ее части.

1) В первом случае получим два изображения источника, смещенного относительно главной оптической оси. У каждой половинки линзы будет своя оптическая ось (рис.32).

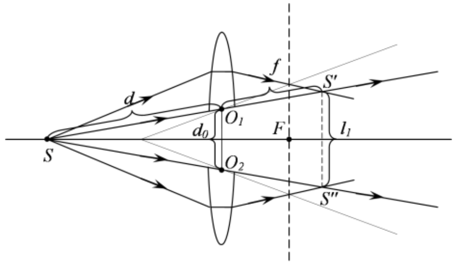

Рис. 32

Из подобия треугольников O_1SO_2 и $S'SS''$ следует:

$$\frac{l_1}{d_0} = \frac{d+f}{d},$$

откуда

$$l_1 = d_0\,\frac{d+f}{d}.$$

Расстояние *f* найдем из формулы линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

$$f = \frac{d \cdot F}{d - F}.$$

Окончательно получим

$$l_1 = d_0\,\frac{d + d \cdot F/(d-F)}{d} = \frac{d_0 \cdot d}{(d-F)}.$$

2) Во втором случае оптическая ось у обеих половинок линзы будет одна и та же, изображение S' и S'' будут смещены относительно друг друга, так как от источника до линз разные расстояния (рис.33).

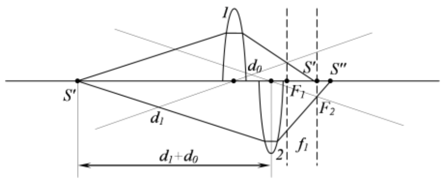

Рис. 33

Формула линзы для определения f_1 и f_2 имеет вид

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1},$$

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d_1+d_0}+\frac{1}{f_2},$$

откуда

$$f_1=\frac{F\cdot d_1}{d_1-F},$$

$$f_2=\frac{F(d_1-d_0)}{(d_1+d_0-F)\cdot(d_1-F)}.$$

3) В третьем случае изображение получится там же, где и в случае открытой линзы, но образует это изображение меньшее число лучей (меньший световой поток), $l_3=0$ (рис.34).

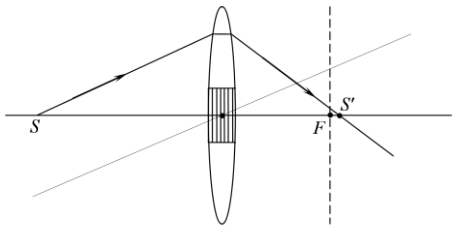

Рис. 34

Подставим численные значения, получим

$$l_1=\frac{0,01\cdot 0,75}{(0,75-0,2)}\,м=0,014\,м,$$

$$l_2=-\frac{0,04\cdot 0,01}{(0,75+0,01-0,2)\cdot(0,75-0,2)}\,м=-0,0013\,м,$$

$$l_3=0.$$

7. Плоская поверхность плоско-выпуклой линзы посеребрена. Фокусное расстояние линзы 0,3 *м*. Определите, где будет находиться изображение предмета, расположенного на расстоянии 60 *см* от линзы.

Решение:

Лучи, идущие от предмета, испытываю преломление, затем отражаются от зеркала и преломляются второй раз, выходя из линзы. Если бы поверхность не была посеребрена, то изображение предмета располагалось бы на расстоянии $2F$ от линзы, что следует из формулы

$$\frac{1}{2F}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}.$$

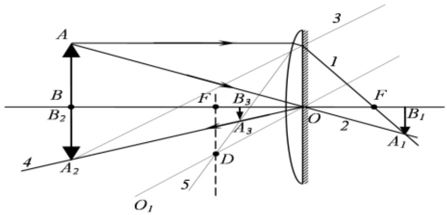

Рис. 35

Для построения изображения берем лучи 1 и 2 (рис. 35). Отразившись от зеркальной поверхности, лучи идут так, что, если бы не было линзы, то было бы получено изображение A_2B_2 (A_1B_1 является предметом для зеркала). Лучи 3 и 4 – это лучи, отраженные от поверхности зеркала. Эти лучи преломляются в линзе. Изображение A_2B_2 - мнимый предмет для линзы и окончательно получим действительное изображение A_3B_3. Для определения преломления луча 3 чертим побочную оптическую ось, параллельную этому лучу. Побочная оптическая ось пересечет фокальную плоскость в очке D, в эту же точку, преломившись, попадет луч 3. Луч 4 не изменяет своего направления, так как он проходит через оптический центр линзы. Пересечение лучей 5 и 4 – A_3 – дает изображение точки A.

Тогда по формуле линзы имеем:

$$\frac{1}{F}=-\frac{1}{2F}+\frac{1}{f},$$

откуда

$$f=\frac{2}{3}F\,,$$

$$f=20\,см=0{,}2\,м\,.$$

Эту задачу можно решить другим способом. Так как благодаря зеркалу луч два раза преломляется на выпуклой поверхности линзы, можно рассмотреть линзу с двумя преломляющими сферическими поверхностями. Соответственно фокусное расстояние этой линзы F_1 равно

$$\frac{1}{F_1}=\frac{1}{F}+\frac{1}{F}=\frac{2}{F}\,,$$

$$F_1=\frac{F}{2}\,.$$

Тогда по формуле линзы получим

$$\frac{2}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}\,,$$

$$\frac{2}{F}=\frac{1}{2F}+\frac{1}{f}\,,$$

$$f=\frac{2}{3}F\,.$$

Благодаря зеркалу предмета и его изображения находятся слева от линзы.

8. Построить график зависимости линейного увеличения $Г$ предмета от его расстоянии от оптического центра собирающей линзы d.

Решение:

Увеличение линзы равно

$$Г=\frac{f}{d}\,.$$

При $d<F$ изображение мнимое. Из формулы линзы

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}-\frac{1}{f}$$

следует

$$\Gamma = \frac{F}{F-d}.$$

Отсюда ясно, что с приближением d к F увеличение $\Gamma \to \infty$.

При $d > F$ изображение действительное и

$$\Gamma = \frac{F}{d-F}.$$

Очевидно, что при $d = 2F$ увеличение $\Gamma = 1$. При дальнейшем росте d увеличение Γ уменьшается (рис.36).

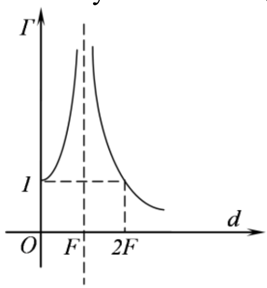

Рис. 36

9. Автомобиль движется со скоростью $\upsilon = 72\,км/ч$ на расстоянии $d = 500\,м$ от фотоаппарата. Фокусное расстояние телеобъектива фотоаппарата $F = 50\,см$. Какова должна быть экспозиция Δt, чтобы размытость изображения не превышала $\Delta x = 10^{-4}\,м$?

Решение:

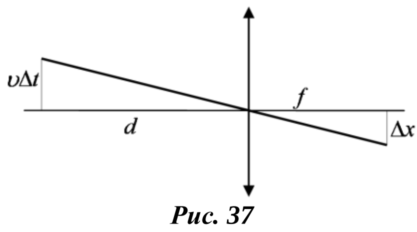

Рис. 37

За время экспозиции Δt автомобиль переместится на расстояние $\upsilon\Delta t$, а его изображение переместится на Δx (рис.37).

$$\frac{\upsilon\Delta t}{d}=\frac{\Delta x}{f},$$

Откуда получаем для времени экспозиции

$$\Delta t=\frac{d\Delta x}{f\upsilon}.$$

Используя формулу линзы

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}$$

найдем

$$f=\frac{Fd}{d-F}.$$

Подставив выражение для *f* в $\Delta t=\dfrac{d\Delta x}{f\upsilon}$, получим

$$\Delta t=\frac{\Delta x\left(d-F\right)}{\upsilon F},$$

$$\Delta t=\frac{10^{-4}\left(500-0,5\right)}{20\cdot 0,5}=4,995\cdot 10^{-3}\,c.$$

10. Высота изображения предмета на пленке в фотоаппарате при съемке с расстояния $d_1=2\,м$ равна $h_1=30\,мм$, а при съемке с расстояния $d_2=3,9\,м$ высота $h_2=15\,мм$. Определить фокусное расстояние *F* объектива фотоаппарата.

Решение:

Пусть высота предмета *H* (рис.38), тогда увеличение в первом и во втором случаях

$$\varGamma_1=\frac{h_1}{H},$$

$$\varGamma_2=\frac{h_2}{H}.$$

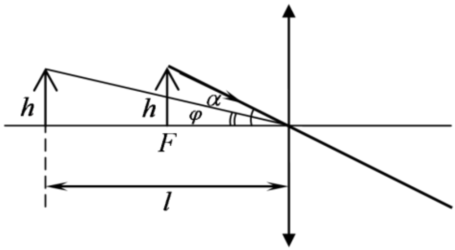

Рис. 38

Запишем для каждого случая в отдельности формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1},$$

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}.$$

Из выражений $\varGamma_1=\dfrac{h_1}{H}$, $\varGamma_2=\dfrac{h_2}{H}$ получим

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{\varGamma_1}{\varGamma_2}=\frac{f_1/d_1}{f_2/d_2},$$

откуда

$$f_1=\frac{h_1 d_1}{h_2 d_2}\,f_2.$$

Приравнивая правые части $\dfrac{1}{F}=\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{f_1}$ и $\dfrac{1}{F}=\dfrac{1}{d_2}+\dfrac{1}{f_2}$ и подставляя выражение $f_1=\dfrac{h_1 d_1}{h_2 d_2}\,f_2$, получим

$$\frac{h_2 d_2}{h_1 d_1 f_2}+\frac{1}{d_1}=\frac{1}{f_2}+\frac{1}{d_2}.$$

Решая

$$\frac{h_2 d_2}{h_1 d_1 f_2} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{d_2}$$

относительно f_2 найдем:

$$f_2 = \frac{d_2\left(h_1 d_1 - h_2 d_2\right)}{h_1\left(d_2 - d_1\right)}.$$

И, окончательно, подставив выражение $f_2 = \dfrac{d_2\left(h_1 d_1 - h_2 d_2\right)}{h_1\left(d_2 - d_1\right)}$ в $\dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{d_2} + \dfrac{1}{f_2}$, получим *F*:

$$F = \frac{d_2 f_2}{d_2 + f_2} = \frac{h_1 d_1 - h_2 d_2}{h_1 - h_2},$$

$$F = \frac{0,03 \cdot 2 - 0,015 \cdot 3,9}{0,03 - 0,015} \text{м} = 0,1\text{м}.$$

11. Оптическая сила лупы $D = 30\,\text{дптр}$. Расстояние наилучшего зрения $l = 25\,\text{см}$. Определите увеличение лупы при рассмотрении предмета без напряжения зрения.

Решение:

Для того, чтобы лучше рассмотреть предмет, надо увеличить угол зрения (для этого предмет подносится ближе к глазам). Минимальное расстояние, на котором глаз обеспечивает четкую фокусировку, называется расстоянием наилучшего зрения. Считается, что это расстояние равно 25 *см*. Максимальное расстояние, на котором глаз обеспечивает четкую фокусировку, называется пределом видения, это расстояние очень велико, при этом мышцы глаза полностью расслаблены. При рассмотрении предмета с помощью лупы предмет помещают или в фокальной плоскости собирающей линзы (лупы), чтобы мышцы глаза при рассматривании были расслаблены (изображение бесконечно удалено) и глаз аккомодирован на бесконечность, или изображение должно находиться на расстоянии наилучшего зрения, т.е. предмет должен находиться между фокусом и оптическим центром линзы. Из рис. 38 следует, что угловое увеличение или просто увеличение лупы равно отношению углов зрения:

$$\Gamma = \frac{\alpha}{\varphi},$$

где $\alpha = \dfrac{h}{F}$ - угол, под которым предмет виден в лупу. Считаем, что h настолько мало, что

$$tg\alpha \approx \alpha \text{ и } tg\varphi \approx \varphi,$$

где $\varphi \approx \dfrac{h}{l}$ – угол, под которым предмет виден невооруженным глазом.

Следовательно,

$$\Gamma = \frac{l}{F} = l \cdot D,$$

$$\Gamma = 0,25 \cdot 30 = 7,5.$$

12. Определить оптическую силу очков для дальнозоркого человека, чтобы он видел так же, как человек с нормальным зрением. Расстояние наилучшего зрения нормально видящего человека 25 *см*, дальнозоркого – 1 *м*.

Решение:

Изображение предмета (мнимое прямое), даваемое очками, позволяет рассматривать его на расстоянии наилучшего зрения дальнозоркого человека. При этом сам предмет должен находиться на расстоянии наилучшего зрения человека с нормальным зрением $\left(d_0 = 0,25\,м\right)$. Тогда дальнозоркий человек будет видеть предмет так же, как и человек с нормальным зрением. В этом случае формула линзы имеет вид:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d},$$

откуда

$$D = \frac{1}{F} = \frac{d - d_0}{d_0 d} = \frac{1 - 0,25}{0,25 \cdot 1}\,дптр = 3\,дптр.$$

13. Пределы аккомодации глаза у близорукого человека лежат между 20 и 50 *см*. Определить, как изменятся эти пределы, если человек наденет очки с оптической силой – 2 *дп*.

Решение:

У близорукого человека изображение удаленных предметов находится перед сетчаткой глаза, поэтому используются очки с рассеивающими линзами. В очках человек видит только те предметы, изображения которых, даваемые очками, лежат в пределах области аккомодации глаза. Очки дают мнимое прямое изображение. Формула линзы в этом случае имеет вид:

$$D = -\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_1},$$

$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2},$$

откуда

$$d_1 = \frac{Ff_1}{F - f_1},$$

$$d_2 = \frac{Ff_2}{F - f_2},$$

$$d_1 = \frac{0,5 \cdot 0,2}{0,5 - 0,2} = \frac{1}{3}\,м,$$

$$d_2 = \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,5 - 0,5} \to \infty.$$

Следовательно, человек может нормально видеть от 0,33 *м* до бесконечного расстояния.

14. Из трех линз, расположенных вплотную друг к другу, составлена плоскопараллельная пластинка. Причем оптическая сила системы первой и второй линз равна 5 *дп*, системы второй и третьей 4 *дп*. Найти фокусные расстояния первых трех линз.

Решение:

Оптическая сила системы первой и второй линз равна

$$D_{1,2} = D_1 + D_2.$$

Оптическая сила системы второй и третьей линз равна

$$D_{2,3} = D_2 + D_3 .$$

Поскольку линзы образуют плоскопараллельную пластинку, параллельные лучи, падающие на нее, также выходят параллельным пучком. Следовательно, оптическая сила плоскопараллельной пластинки равна нулю.

С другой стороны, оптическая сила всей системы равна сумме оптических сил каждой линзы и равна нулю:

$$D_1 + D_2 + D_3 = 0 .$$

Таким образом, имеем систему трех уравнений

$$\begin{cases} D_{1,2} = D_1 + D_2 \\ D_{2,3} = D_2 + D_3 \\ D_1 + D_2 + D_3 = 0 \end{cases}$$

относительно трех неизвестных D_1, D_2 и D_3. Из $D_{1,2} = D_1 + D_2$ и $D_{2,3} = D_2 + D_3$ получаем $D_1 = D_{1,2} - D_2$, $D_3 = D_{2,3} - D_2$.

Подставив в $D_1 + D_2 + D_3 = 0$, получим $D_2 = D_{1,2} + D_{2,3}$.

Тогда $D_1 = -D_{2,3}$, $D_3 = -D_{1,2}$ и окончательно имеем $D_1 = -4\,дп$, $D_2 = 9\,дп$, $D_3 = -5\,дп$.

Следовательно, $F_1 = 0{,}25\,м$, $F_2 = \dfrac{1}{9}\,м$, $F_3 = 0{,}2\,м$.

15. Линза, составлена из двух собирающих тонких линз. Если оставить только первую линзу, то она дает увеличение предмета $Г_1 = 2$. Если оставить только вторую линзу, то увеличение станет равным $Г_2 = 4$. Расстояние от предмета до линзы не изменяется. Определить увеличение *Г*, даваемое обеими линзами, сложенными вместе.

Решение:

Увеличение линзы определяется соотношением

$$\Gamma = \frac{f}{d}.$$

Формула линзы имеет вид

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} = D.$$

Выразив отсюда f, имеем для Г:

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{d}{d/(d \cdot D - 1)} = d \cdot D - 1.$$

Тогда

$$\frac{1}{\Gamma_1} = D_1 d - 1,$$

$$\frac{1}{\Gamma_2} = D_2 d - 1.$$

По условию задачи тонкие линзы сложены вместе, поэтому оптическая сила системы этих линз равна $D = D_1 + D_2$ и увеличение Г дается выражением

$$\frac{1}{\Gamma} = (D_1 + D_2) d - 1$$

Выразим D_1 и D_2 через Γ_1 и Γ_2:

$$D_1 = \left(\frac{1}{\Gamma_1} + 1 \right) \frac{1}{d},$$

$$D_2 = \left(\frac{1}{\Gamma_2} + 1 \right) \frac{1}{d},$$

следовательно,

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2} + 1,$$

$$\frac{1}{\Gamma} = 0,5 + 0,25 + 1 = 1,75,$$

$$\Gamma = \frac{1}{1{,}75} = \frac{4}{7}.$$

Увеличение при неизменном расстоянии d зависит только от оптической силы линзы. Если предмет находится на одинаковом расстоянии от линз с разными оптическими силами $\left(D_1 > D_2 > D_3 > ...\right)$ и при этом за фокусом линзы, то увеличение линз будет тем меньше, чем больше оптическая сила линзы $\left(\Gamma_1 < \Gamma_2 < \Gamma_3 < ...\right)$.

16. Две линзы с фокусными расстояниями F_1 и F_2, приставленные вплотную друг к другу, дают изображение источника, расположенного на некотором расстоянии перед линзами. Обе линзы заменяют одной, помещенной на том же месте. Какова должна быть оптическая сила D этой линзы, чтобы положение изображения источника не изменилось?

Решение:

Лучи, прошедшие первую линзу, дадут изображение (действительное или мнимое) на расстоянии a от линзы, определяемом формулой линзы

$$\frac{1}{d} \pm \frac{1}{a} = \pm \frac{1}{F_1}.$$

Это изображение служит источником (мнимым или действительным) для второй линзы, т.е.

$$\mp \frac{1}{a} + \frac{1}{f} = \pm F_2.$$

Для заменяющей линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D.$$

Сравнивая сумму первых двух уравнений с третьим, убеждаемся, что

$$D = \pm \frac{1}{F_1} \pm \frac{1}{F_2},$$

т. е. оптическая сила линзы, заменяющей систему приставленных вплотную линз, равна алгебраической сумме оптических сил этих линз.

Так как рассуждение можно продолжить, приставив к двухлинзовой системе третью линзу, то результат может быть распространен на любое число линз. Формула зеркала по структуре и смыслу совпадает с формулой линзы, поэтому сделанный вывод касается также оптических систем, содержащих зеркала (приставленные вплотную к линзе). Здесь, однако, необходимо иметь в виду, что отразившись от зеркала, луч еще раз может пройти через линзу, которую в этом случае придется учитывать дважды.

17. Плоско-выпуклая линза изготовлена из вещества с показателем преломления n. Радиус кривизны выпуклой поверхности линзы равен *R*, плоская поверхность линзы посеребрена. Найти оптическую силу *D* такой системы.

Решение:

Система равносильна двум сложенным вместе линзам с

$$D_л = \frac{1}{F} = \frac{(n-1)}{R}$$

каждая, поскольку оптическая сила плоского зеркала равна нулю. Оптическая сила системы

$$D = 2D_л = \frac{2(n-1)}{R}.$$

18. Сходящийся пучок лучей, падающих на двояковогнутую линзу с радиусом кривизны $R = 3\,м$, имеет вид конуса, вершина которого находится на расстоянии $d = 4\,см$ за линзой. Задняя поверхность линзы посеребрена. Преломившись на передней поверхности линзы, отразившись от задней и снова преломившись на передней, лучи сходятся в точку, расположенную на расстоянии $f_1 = 12\,м$ перед линзой. На каком расстоянии f_2 за линзой сошлись бы лучи, если бы задняя поверхность линзы не была посеребрена?

Решение:

Для непосеребренной линзы

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f_2}=-\frac{1}{F}.$$

Посеребренную линзу можно рассматривать как оптическую систему, состоящую из трех сложенных вместе компонентов: рассеивающей линзы с

$$D_1=-\frac{1}{F},$$

выпуклого зеркала

$$D_2=-\frac{2}{R}$$

и рассеивающей линзы с

$$D_1=-\frac{1}{F}.$$

Оптическая сила такой системы

$$D=D_1+D_2+D_1=-2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{F}\right).$$

Поэтому для посеребренной линзы

$$-\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=D;$$

Отсюда

$$f_2=\frac{2f_1Rd}{2f_1d+dR+rf_1}=2\,м$$

19. Светящаяся точка находится на расстоянии $d=15\,см$ от плоского зеркала на главной оптической оси. Плоское зеркало расположено в оптическом центре вогнутого зеркала с радиусом кривизны $R=60\,см$. Найти положение изображения светящейся точки, даваемого лучами, отраженными от вогнутого, а затем от плоского зеркала.

Решение:

Расстояние от светящейся точки до вогнутого зеркала $a = R - d$. Расстояние f от изображения точки до вогнутого зеркала определяется по формуле зеркала

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{f} = \frac{2}{R}.$$

Расстояние от этого изображения до плоского зеркала $b = R - f$. Второе изображение, даваемое плоским зеркалом, находится по другую сторону плоского зеркала на таком же расстоянии b от него. Следовательно, расстояние от второго изображения до вогнутого зеркала $c = R + b$; отсюда

$$c = \frac{R(R - 3d)}{R - 2d} = 30\,см.$$

Второе изображение находится в фокусе вогнутого зеркала.

20. Точечный источник света находится на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы на главной оптической оси. Плоское зеркало расположено на таком расстоянии за линзой, что лучи, отразившись от зеркала и вторично пройдя через линзу, идут параллельным пучком. Найти диаметр l пучка, если диаметр линзы равен L.

Решение:

В отсутствие зеркала линза дала бы изображение источника в точке C на расстоянии f (рис.39), определяемом из формулы линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

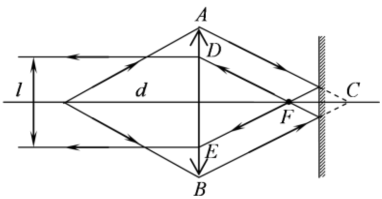

Рис. 39

Чтобы лучи после вторичного преломления в линзе шли параллельным пучком, они должны после отражения от зеркала сойтись в фокусе линзы. Треугольники *ABC* и *DEF* подобны. Следовательно,

$$\frac{l}{L}=\frac{F}{f};$$

отсюда

$$l=\left(d-F\right)\frac{L}{d}.$$

По условию задачи $d=2F$, поэтому

$$l=\frac{L}{2}.$$

21. Свеча находится на расстоянии $d=15\,см$ перед собирающей линзой с фокусным расстоянием $F=30\,см$. Плоское зеркало расположено на расстоянии $b=15\,см$ за линзой. На каком расстоянии а от линзы получится изображение свечи, даваемое системой?

Решение:

Изображение свечи, даваемое линзой, отстоит от нее на расстоянии *f*, а от зеркала – на расстоянии $b+f$. Изображение в плоском зеркале расположено по другую сторону зеркала на том же расстоянии $b+f$ и, следовательно, на расстоянии $2b+f$ от линзы. Лучи, как бы исходящие из этого изображения, снова проходят через линзу, образуя изображение на расстоянии *a* от нее. Из формул линзы для первого и второго изображений

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2b+f}+\frac{1}{a}=\frac{1}{F}$$

имеем

$$a=F\frac{2b\left(d-F\right)-F\cdot d}{2b\left(d-F\right)+F\left(F-2d\right)}=60\,см.$$

22. Точечный источник света находится на расстоянии $d = 15\,см$ от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 30\,см$ на главной оптической оси. По другую сторону линзы на расстоянии $b = 5\,см$ от нее расположено плоское зеркало. Найти расстояние a между источником и его мнимым изображением в зеркале.

Решение:

Расстояние f от линзы до изображения источника, даваемого линзой, определяется формулой

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}.$$

Это изображение расположено на расстоянии $f + b$ перед зеркалом. Мнимое изображение в зеркале находится на таком же расстоянии за зеркалом. Общее расстояние

$$a = (d + b) + (f + b) = d + 2b + \frac{F \cdot d}{F + d} = 31\,см.$$

23. Параллельный пучок света падает на собирающую линзу, а затем на вогнутое зеркало с фокусным расстоянием $F_2 = 24\,см$. Расстояние между линзой и зеркалом $b = 32\,см$. Каким должно быть фокусное расстояние F_1 линзы, чтобы свет, отразившись от зеркала, собрался в точке, удаленной от зеркала на расстояние $f = 6\,см$?

Решение:

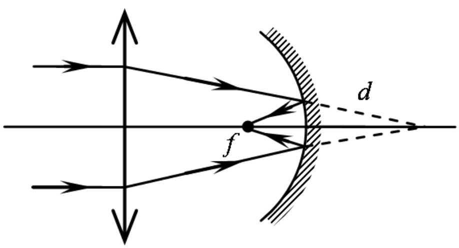

Рис. 40

Так как $f < F_2$, то на зеркало падает сходящийся пучок (рис.40). Если бы зеркала не было, то вершина этого пучка находилась бы на расстоянии F_1 от линзы и, следовательно, на расстоянии $d = F_1 - b$ от зеркала. По формуле зеркала

$$-\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F_2};$$

отсюда

$$F_1 = b + \frac{f \cdot F_2}{(F_2 - f)} = 40\,см.$$

24. Собирающая линза с фокусным расстоянием F находится на расстоянии b перед вогнутым зеркалом с радиусом кривизны R. На каком расстоянии d перед линзой нужно поместить точечный источник света, чтобы лучи, пройдя линзу, отразившись от зеркала и снова пройдя линзу, собрались в той же точке, где расположен источник? При каких расстояниях b от линзы до зеркала решение возможно?

Решение:

Лучи собираются в точке, где расположен источник, если любой луч, идущий от источника, пойдя через линзу, падает на зеркало по его радиусу и отражается по тому же направлению (рис. 41).

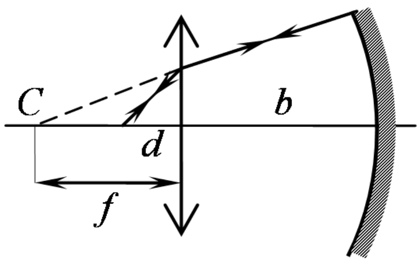

Рис. 41

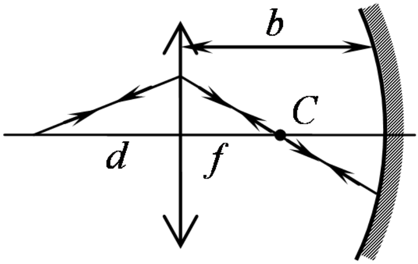

Рис. 42

Линза при этом может быть расположена ближе (рис. 41) или дальше (рис.42) оптического центра *C* зеркала:

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F},$$

$$b+f=R$$

или

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F},$$

$$b-f=F.$$

Обе системы уравнений дают

$$d=\frac{F\left(R-b\right)}{F+R-b}.$$

Так как по условию источник действительный, то решение возможно лишь в случаях $h \le R$ или $F+r<b$.

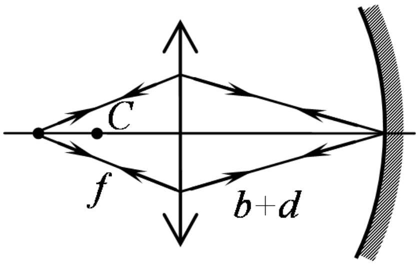

Рис. 43

Лучи собираются в точке, где расположен источник, так же в случае, если источник находится на таком расстоянии b от линзы, что линза дает его изображение на самом зеркале (рис.43), т.е.

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F},$$

откуда

$$d=\frac{F\cdot b}{b-F}.$$

В этом случае необходимо, чтобы выполнялось условие $b>F$.

25. Точечный источник света находится на расстоянии $d=10\,см$ от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=12\,см$ на главной оптической оси. Лучи, преломившись в линзе, падают на выпуклое зеркало, расположенное на расстоянии $b=3\,см$ за линзой. Отраженные от зеркала лучи, вновь пройдя через линзу, идут пучком, параллельным оптической оси (рис.44).

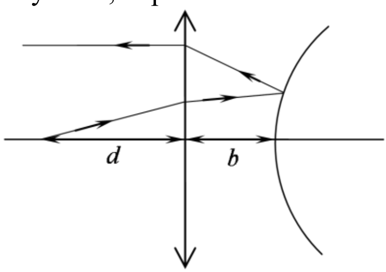

Рис. 44

Найти радиус кривизны *R* зеркала.

Решение:

Данную задачу можно представить как совокупность трех задач, рассматриваемых последовательно.

1) Источник расположен на расстоянии d от линзы с фокусным расстоянием *F*. Его изображение находится на расстоянии f_1 от линзы (рис. 45).

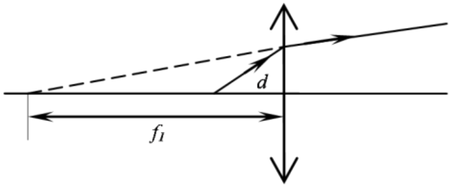

Рис. 45

2) Это изображение находится на расстоянии d_2 от зеркала и служит для него действительным источником. Его изображение получается на расстоянии f_2 (рис.46).

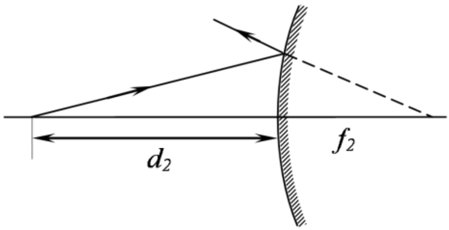

Рис. 46

3) Так как лучи по выходе из линзы идут пучком, параллельным главной оптической оси, то изображение, даваемое зеркалом, служит для линзы действительным источником, расположенным от нее на расстоянии $d_3 = F$ (рис.47).

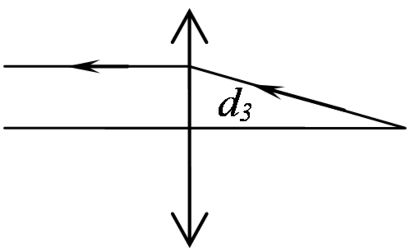

Рис. 47

Следовательно,

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F},$$

$$\frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2} = -\frac{2}{R},$$

$$d_2 = f_1 + b,$$

$$d_3 = f_2 + b = F;$$

отсюда

$$R = \frac{2\left(F \cdot d + F \cdot b - b \cdot d\right) \cdot \left(F - b\right)}{2\left(F \cdot d + F \cdot b - b \cdot d\right) - F^2} = 21 см.$$

26. Точечный источник света находится на расстоянии $d = 15 см$ от линзы с фокусным расстоянием $F = 10 см$ на главной оптической оси. За линзой расположено выпуклое зеркало с радиусом кривизны $R = 24 см$. Линза формирует изображение источника с помощью лучей, прошедших через линзу, отраженных от зеркала и вновь прошедших через линзу. На каком минимальном расстоянии a от линзы должно находиться зеркало, чтобы изображение источника света совпало с самим источником?

Решение:

Расстояние f_1 от линзы до первого изображения источника, даваемого линзой, удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}.$$

Второе изображение получается в зеркале на расстоянии f_2 от него, причем

$$\frac{1}{a - f_1} - \frac{1}{f_2} = -\frac{2}{R}.$$

Наконец, для третьего изображения, даваемого линзой, должно выполнить условие

$$\frac{1}{a + f_2} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}.$$

Из первого уравнения системы находим

$$f_1 = \frac{F \cdot d}{d - F}.$$

Исключив f_2 из двух других уравнений, получим квадратное уравнение

$$a^2 - \left(2 f_1 - R\right) a + f_1^2 - R \cdot f_1 = 0;$$

отсюда

$$a = f_1 - \frac{R}{2} \pm \frac{R}{2}.$$

Решение со знаком минус дает

$$a = \frac{F \cdot d}{d - F} - R = 6\,см.$$

В этом случае лучи, вышедшие из линзы, падают на поверхность зеркала перпендикулярно, а первое изображение, даваемое линзой, совпадает с оптически центром зеркала. Решение со знаком плюс приводит к большему значению: $a = f_1 = 30\,см$. При этом изображение совпадает с полюсом зеркала.

27. Рассеивающая линза и вогнутое зеркало расположены так, что пучок лучей, параллельных главной оптической оси, пройдя линзу, отразившись от зеркала и еще раз пройдя линзу, остается параллельным той же оси. Фокусные расстояния линзы и зеркала $F_1 = 12\,см$ и $F_2 = 36\,см$. Где и какое получится изображение, если поместить точечный источник света в оптическом центре зеркала?

Решение:

Из условия задачи следует, что передний фокус линзы совпадает с оптическим центром зеркала, т. е. линза расположена от зеркала на расстоянии $R - F_1$, где $R = 2F_2$ – радиус кривизны зеркала (рис.48).

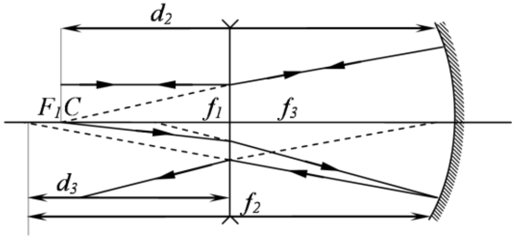

Рис. 48

Изображение источника, помещенного в фокусе рассеивающей линзы, получается на расстоянии $f_1 = \dfrac{F_2}{2}$ от линзы и, следовательно, на расстоянии $d_2 = R - \dfrac{F_1}{2}$ от зеркала. Это изображение служит действительным источником для зеркала. Поэтому, если бы лучи не проходили второй раз через линзу, то они собирались бы на расстоянии f_2 от зеркала, причем

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_2},$$

или

$$f_2 = \frac{F_2 \cdot d_2}{d_2 - F_2} = \frac{\left(4F_2 - F_2\right)F_2}{2F_2 - F_1}.$$

Отразившийся от зеркала сходящийся пучок встречает линзу, расположенную на расстоянии

$$d_3 = f_2 - \left(R - F_1\right) = \frac{\left(3F_2 - F_1\right)F_1}{\left(2F_2 - F_1\right)}$$

от точки схождения лучей; поэтому

$$-\frac{1}{d_3} + \frac{1}{f_3} = -\frac{1}{F_1},$$

или

$$f_2 = \frac{F_1 \cdot d_3}{F_1 - d_3} = -\frac{\left(3F_2 - F_1\right)F_1}{F_2}.$$

По условию задачи $F_1 < 2F_2$ поэтому $f_3 < 0$. Это значит, что, выйдя из линзы, лучи расходятся, а точки пересечения их продолжений лежат между зеркалом и линзой на расстоянии $f_3 = -\dfrac{\left(3F_2 - F_1\right)F_1}{F_2} = -32\,см$ от линзы.

28. Малые противоположные участки поверхности сферы радиуса R посеребрены. Светящаяся точка находится на диаметре, соединяющем центры участков. На каком расстоянии a от центра сферы должна находиться светящаяся точка, чтобы после отражения от одного, а затем от другого участка лучи сошлись на расстоянии $b = \dfrac{3R}{4}$ от центра сферы?

Решение:

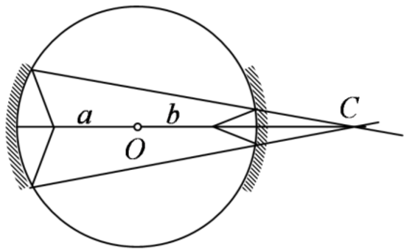

Рис. 49

Для первого участка (рис.49) имеем

$$\frac{1}{R-a} + \frac{1}{2R+c} = \frac{2}{R},$$

для второго

$$-\frac{1}{c} + \frac{1}{R-b} = \frac{2}{R};$$

отсюда

$$a = \frac{R \cdot b}{4b - R}.$$

Если $b = \dfrac{3R}{4}$, то $a = \dfrac{3R}{8}$;

если $b = -\dfrac{3R}{4}$, то $a = \dfrac{3R}{16}$.

29, Две собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 20\,см$ и $F_2 = 40\,см$ расположены на расстоянии $b = 1{,}5\,см$ друг от друга. Предмет высоты $l = 2\,см$ находится на расстоянии $d_1 = 25\,см$ от первой линзы. На каком расстоянии f_2 от второй линзы получится изображение предмета после прохождения лучей через обе линзы? Какова высота L_2 полученного изображения?

Решение:

Изображение, создаваемое первой линзой, находится на расстоянии f_1 от нее и имеет высоту

$$L_1 = k_1 l = \left(\frac{f_2}{d_2}\right) L_1,$$

где k_1 – увеличение первой линзы. От второй линзы оно находится на расстоянии $d_2 = l - f_1$ и в свою очередь служит для нее предметом. Изображение, создаваемое второй линзой, находится на расстоянии f_2 от нее и имеет высоту

$$L_2 = k_2 L_1 = \left(\frac{f_2}{d_2}\right) L_1,$$

где k_2 – увеличение второй линзы.

По формуле линзы

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_1},$$

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_2}.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем

$$f_2 = F_2 \frac{b\left(d_1 - F_1\right) - F_1 d_1}{\left(b - F_2\right)\left(d_1 - F_1\right) - F_1 d_1} = 2\,м.$$

$$L_2 = k_1 k_2 l = \frac{F_1 F_2 l}{(b - F_2)(d_1 - F_1) - d_1 F_1} = 32\,см.$$

30. Две собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 10\,см$ и $F_2 = 15\,см$ дают изображение предмета высоты $l = 2\,см$, расположенного на расстоянии $d = 10\,см$ от первой линзы. Найти высоту L изображения предмета, даваемого системой линз. Построить изображение предмета.

Решение:

Предмет расположен в фокальной плоскости первой линзы; следовательно, лучи, идущие от какой-либо точки предмета, по выходе из линзы идут параллельным пучком (рис.50).

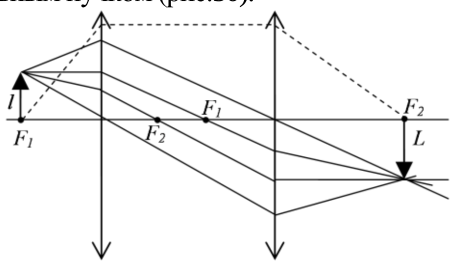

Рис. 50

Если вторая линза расположена на расстоянии $b < \frac{(a_1 + a_2)F_1}{2l}$ от первой линзы, где a_1 и a_2 – диаметры линз, то каждый из таких параллельных пучков, пройдя вторую линзу, даст изображение соответствующей точки предмета в фокальной плоскости второй линзы. Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{l}{F_1} = \frac{L}{F_2},$$

откуда $L = \frac{l \cdot F_2}{F_1} = 3\,см$.

Изображение получается действительным. Его можно наблюдать, поместив глаз на соответствующие расстояния за второй линзой.

31. На каком минимальном расстоянии l должны быть помещены на Луне два ярких источника света для того, чтобы их можно было видеть с Земли в телескоп раздельно? Фокусные расстояния объектива и окуляра телескопа $F_1 = 8\,см$ и $F_2 = 1\,см$. Человеческий глаз может видеть раздельно два предмета, наблюдаемые под углом не менее $\varphi_0 = 0,001\,рад$. Расстояние от Земли до Луны $r \approx 3,8 \cdot 10^8\ м$.

Решение:

В телескопе фокальная плоскость объектива совпадает с фокальной плоскостью окуляра. Параллельный пучок лучей, пройдя такую систему линз, остается параллельным, но составляет уже другой угол с осью трубы. Угловое увеличение телескопа

$$k = \frac{F_1}{F_2}.$$

Отрезок длины l между двумя яркими источниками глаз видит под углом

$$\varphi \approx \frac{l}{r}.$$

По условию задачи $k\varphi \geq \varphi_0$;

отсюда $l \geq \varphi_0 r \dfrac{F_2}{F_1} \approx 475\,м$.

32. Для определения увеличения зрительной трубы, окуляром которой является собирающая линза, объектив заменяют квадратной диафрагмой со стороной l. Найти увеличение k трубы, если окуляр дает действительное изображение диафрагмы со стороной L.

Решение:

Если труба предназначена для наблюдения удаленных предметов, то расстояние между ее объективом и окуляром $d = F_1 + F_2$, а увеличение трубы

$$k = \frac{F_1}{F_2},$$

где F_1 и F_2 – фокусные расстояния объектива и окуляра. При наличии диафрагмы

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F_2},$$

причем $\frac{f}{d}=\frac{L}{l}$;

отсюда $k=\frac{l}{L}$.

33. Для наблюдения некоторого объекта используют длиннофокусный микроскоп, объектив которого не должен приближаться к объекту ближе, чем на расстояние $d=5 см$. С каким фокусным расстоянием F надо взять объектив, если увеличение микроскопа должно быть $k_1=180$, а увеличение окуляра $k_2=20$?

Решение:

Увеличение микроскопа $k=k_1k_2$;

для объектива

$$k_1=\frac{f_1}{d_1},$$

причем d_1 и f_1 связаны соотношением

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F_1}.$$

Увеличение окуляра

$$k_2=\frac{d_0}{d_2},$$

где $d_2=l-f_1$.

Решив систему пяти уравнений, найдем

$$k_2=\frac{d_0+k\cdot F_1}{l-F_1}\approx 8.$$

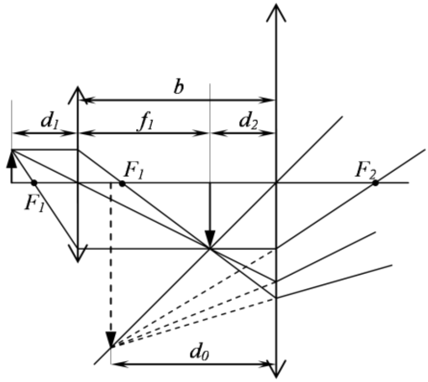

Рис. 51

На рис. 51 изображен случай, когда окончательное изображение находится на расстоянии d_0 от линзы окуляра. Если же глаз наблюдателя не напряжен, то из окуляра должны выходить параллельные пучки лучей. В этом случае $d_2 = l - f_1 = F_2$, где F_2 – фокусное расстояние окуляра. Система уравнений и решение остаются прежними.

34. Ближний и дальний пределы аккомодации глаза близорукого человека $d_1 = 10\,см$ и $d_2 = 12{,}5\,см$. Каковы будут пределы d'_1 и d'_2, если человек наденет очки с оптической силой $D_{очк} = -7\,дптр$?

Решение:

Когда человек рассматривает без очков предмет, находящийся на расстоянии ближнего предела аккомодации, то мышцы, управляющие преломляющей системой его глаза, наиболее напряжены. Если заменить глаз эквивалентной линзой с экраном (сетчаткой), то можно воспользоваться обычной формулой

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = D_1,$$

где f_1 – глубина глаза (расстояние от линзы, которой можно заменить преломляющую систему глаза, до экрана). Рассматривая тот же предмет в очках, человек по условию задачи напрягает мышцы глаза так же, как и без очков, поэтому

$$\frac{1}{d'_1} + \frac{1}{f_1} = D_1 + D_{очк}.$$

Отсюда ближний предел аккомодации глаза, вооруженного очками,

$$d'_1 = \frac{d_1}{1 + D_{очк} \cdot d_1} = 0,33\,м.$$

Аналогично для дальнего предела аккомодации (наибольшее расслабление мышц глаза) имеем

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = D_2,$$

где глубина глаза f_2 и оптическая сила глаза D_2, вообще говоря, другие. Если же человек наденет очки, то

$$\frac{1}{d'_2} + \frac{1}{f_2} = D_2 + D_{очк},$$

откуда

$$d'_2 = \frac{d_2}{1 + D_{очк} \cdot d_2} = 1\,м.$$

Ученик привык читать книгу, держа ее на расстоянии $d = 20\,см$ от глаза. Какова должна быть оптическая сила $D_{очк}$ очков, которые должен носить ученик, чтобы читать книгу, держа ее на расстоянии наилучшего зрения $d_0 = 25\,см$?

Решение:

Для глаз без очков имеем

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D,$$

Для глаз с очками имеем:

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{f} = D + D_{очк};$$

отсюда

$$D_{очк} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} = -1\,дптр.$$

Пройдя такую линзу, лучи от предмета, находящегося на расстоянии $d_0 = 25\,см$, идут так, как если бы они исходили из точек, отстоящих на расстоянии $d = 20\,см$ от глаза.

36. Близорукий человек может четко видеть предмет, если он находится на расстоянии не дальше $d = 20\,см$ от глаза. Какова должна быть оптическая сила $D_{очк}$ очков, которые должен носить этот человек, чтобы четко видеть удаленные предметы?

Решение:

По условию задачи $d = 20\,см$ есть дальний предел аккомодации глаза. Поэтому в очках должны быть использованы такие линзы, пройдя которые параллельные лучи от бесконечно удаленных предметов казались бы исходящими из точек, отстоящих на расстоянии $d = 20\,см$. Так как эти точки лежат в фокальной плоскости линзы, то оптическая сила очков

$$D = -\frac{1}{d} = -5\,дптр.$$

37. Оптическая система состоит из двух собирающих линз с фокусными расстояниями $f_1 = 20\,см$ и $f_2 = 10\,см$. Расстояние между линзами $d = 30\,см$. Предмет находится на расстоянии $a_1 = 30\,см$ от первой линзы. На каком расстоянии от второй линзы получится изображение?

Решение:

Первая линза при отсутствии второй дает изображение $A'B'$ (рис. 52) находящееся на расстоянии $b_1 = 60\,см$ от линзы. Это расстояние находится по формуле линзы

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}.$$

Изображение $A''B''$ является «мнимым» по отношению ко второй линзе. Следовательно,

$$-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}=\frac{1}{f_2},$$

где $a_2=b_1-d=30\,см$.

Отсюда $b_2=7{,}5\,см$.

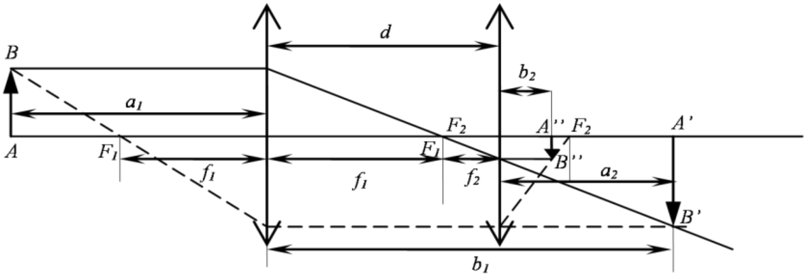

Рис. 52

38. Система состоит из двух линз с одинаковыми по модулю фокусными расстояниями. Одна из линз собирающая, другая рассеивающая. Линзы расположены на одной оси на некотором расстоянии друг от друга. Известно, что если поменять линзы местами, то действительное изображение Луны, даваемое этой системой, сместится на $l=20\,см$. Найти фокусное расстояние каждой из линз.

Решение:

Пусть расстояние между линзами равно а. Тогда, если лучи падают сначала на рассеивающую линзу, уравнение для второй (собирающей) линзы будет иметь вид

$$\frac{1}{F+a}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F}$$

В случае, когда первой стоит собирающая линза, уравнение для рассеивающей запишется в виде

$$-\frac{1}{F-a}+\frac{1}{f_2}=-\frac{1}{F}.$$

Здесь f_1 и f_2 – расстояние от задней линзы до изображения в первом и во втором случаях. По условию $f_1-f_2=l$. Из этих равенств $F=\frac{l}{2}=10\,см$.

39. Линза с фокусным расстоянием $f=30\,см$ дает на экране четкое изображение предмета, расположенного на расстоянии $a=40\,см$ от линзы. Между линзой и предметом перпендикулярно оптической оси линзы поместили плоскопараллельную пластинку толщины $d=9\,см$. На какое расстояние нужно сместить экран, чтобы изображение предмета на нем осталось четким? Показатель преломления стекла пластинки $n=1{,}8$.

Решение:

В результате преломления света пластинкой луч *BE* кажется выходящим из точки S', S'' - мнимое изображение S в пластинке (рис.53). Таким образом, расстояние между изображением предмета в пластинке и линзой $a'=a-SS'$. Смещение $SS'=AD=d-DC$.

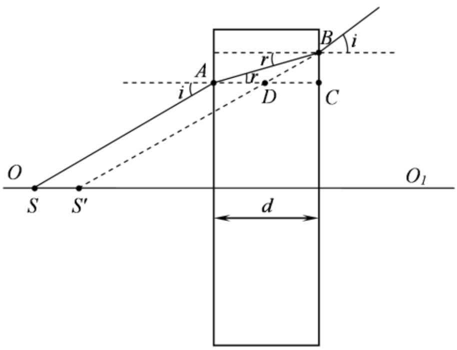

Рис. 53

Считая углы падения на пластинку малыми, имеем

$$DC = \frac{BC}{i} = \frac{d \cdot r}{i} = \frac{d}{n}$$

так как $\frac{i}{r} = n$. Следовательно,

$$SS' = d\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

До помещения пластинки экран находился на расстоянии

$$b = \frac{a \cdot f}{a - f},$$

после ее помещения – на расстоянии $b' = \frac{a' \cdot f}{a' - f} = 180\,см$. Экран нужно сместить на 60 *см*.

40. Стеклянный клин с малым преломляющим углом a расположен на некотором расстоянии от собирающей линзы с фокусным расстоянием *f*, причем одна из поверхностей клина перпендикулярна оптической оси линзы. По другую сторону линзы в ее фокусе находится точечный источник света. Отраженные от клина лучи дают после преломления в линзе два изображения источника, смещенные относительно друг друга на расстояние *d*. Найти показатель преломления стекла клина.

Решение:

Возможны два случая.

а) Оптическая ось линзы перпендикулярна передней грани клина (рис.54). Лучи, отраженные от передней грани, пройдя линзу, дадут изображение точечного источника, совпадающее с самим источником.

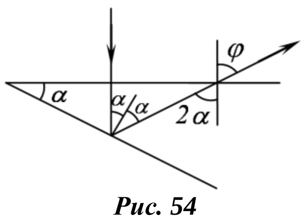

Рис. 54

Лучи, отраженные от задней грани, отклонятся на угол φ, определяемый равенством

$$\frac{\sin\varphi}{\sin 2\alpha} = n.$$

Ввиду малости углов $\varphi = \alpha n$. Второе изображение источника получится на расстоянии d от первого изображения: $d = f\varphi = f \cdot 2\alpha n$.

Отсюда $n = \dfrac{d}{2\alpha f}$.

б) Оптическая ось линзы перпендикулярна задней поверхности клина (рис.55). Лучи, отраженные от передней поверхности, отклонятся на угол $\varphi = 2\alpha f$ и дадут изображение, отстоящее от источника на расстояние $d_1 = 2\alpha f$.

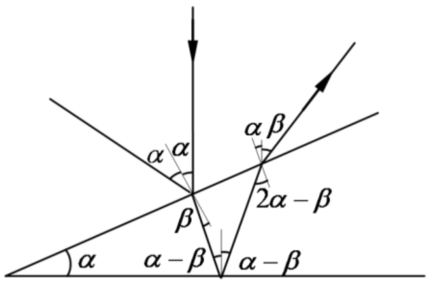

Рис. 55

Лучи, отраженные от задней поверхности, отклонятся на угол Θ, определяемый из уравнений

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n,$$

$$\frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin(2\alpha - \beta)} = n.$$

При малых углах $\Theta = 2\alpha(n-1)$. Поэтому второе изображение будет находиться от источника на расстоянии

$$d_2 = 2\alpha(n-1).$$

Полное расстояние между изображениями

$$d = d_1 + d_2 = 2\alpha nf \ .$$

Отсюда $n = \dfrac{d}{2\alpha f}$ как и в первом случае.

41. Вогнутое зеркало имеет форму полусферы радиуса $R = 55\,см$. В это зеркало налит тонкий слой неизвестной прозрачной жидкости. При этом оказалось, что данная оптическая система при некотором положении источника дает два действительных изображения, одно из которых совпадает с самим источником, а другое отстоит от него на расстояние $l = 30\,см$. Найти показатель преломления *n* жидкости.

Решение:

Так как изображение, совпадающее с источником, образуется в результате отражения от части зеркала, не покрытой жидкостью, то очевидно, что источник расположен в центре полусферы *O* (рис.56).

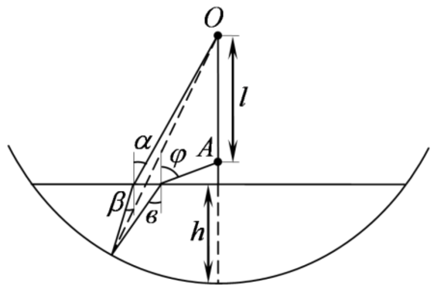

Рис. 56

Найдем положения другого изображения. По закону преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \approx \frac{\alpha}{\beta},$$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\Theta} = n \approx \frac{\varphi}{\Theta}.$$

Как видно из рис. 56,

$$\Theta = \beta + 2\gamma,$$

где $\gamma = \alpha - \beta$ – угол падения преломленного луча на зеркало и $(R - l - h)tg\varphi = (R - h)tg\alpha$.

Пренебрегая h по сравнению с R, из полученной системы уравнений найдем

$$n = \frac{2R - l}{2(R - l)} = 1{,}6.$$

42. Двояковыпуклая линза имеет фокусное расстояние $f_1 = 10\,см$. Одна из поверхностей линзы, имеющая радиус кривизны $R = 10\,см$, посеребрена. Построить изображение предмета, даваемое данной оптической системой, и найти положение изображения, если предмет находится на расстоянии $l = 15\,см$ от линзы.

Решение:

F_1 и F_2 - фокусы линзы и зеркала. $A'B'$ - изображение, даваемое линзой в случае, если ее поверхность не посеребрена (рис. 57).

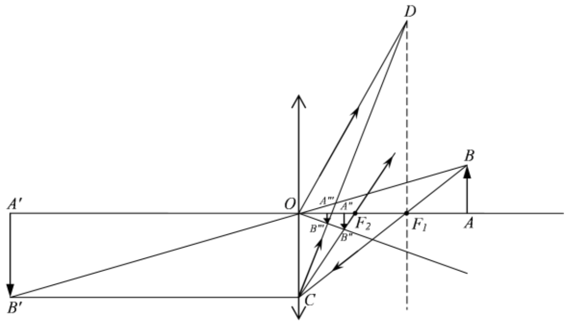

Рис. 57

Изображение $A''B''$, даваемое вогнутым зеркалом, можно построить, учитывая, что луч BO после прохождения линзы и после отражения от зеркальной поверхности пойдет по пути OB'', причем $\angle BOA = \angle B''OA$. Луч BC выходит из линзы параллельно оптической оси системы и после отражения идет через F_2.

Отраженные от зеркала лучи преломляются в линзе еще раз и дают изображение $A'''B'''$. Точка B''' лежит на пересечении лучей OB'' и CD. Луч OB'' проходит через оптический центр линзы после отражения и потому не преломляется. Луч CD строится следующим образом. После первого преломления в линзе и отражения луч BC пойдет в направлении F_2 и преломится в линзе еще раз. Из оптического центра O проводится до пересечения с фокальной плоскостью линзы луч OD, параллельный CF_2. Тогда, соединяя C и D, получим искомый луч.

Так как лучи преломляются в линзе дважды, фокусное расстояние системы может быть найдено из соотношения

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_1}$$

где $f_2=\dfrac{R}{2}$ – фокусное расстояние зеркала. Таким образом,

$$f=\frac{f_1 f_2}{f_1+2f_2}=2,5\,см\,.$$

Отсюда расстояние b до изображения $A'''B'''$ находится по формуле $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{f}$. Следовательно,

$$b=\frac{a\cdot f}{a-f}=3\,см\,.$$

43. На плоской поверхности массивного куска стекла (показатель преломления n) вырезано углубление в виде шарового сегмента. Вынутый из углубления кусок стекла представляет собой тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием f. Найти фокусные расстояния получившейся сферической поверхности.

Решение:

Фокусное расстояние тонкой линзы

$$f=\frac{r}{n-1},$$

где r – радиус сферической поверхности.

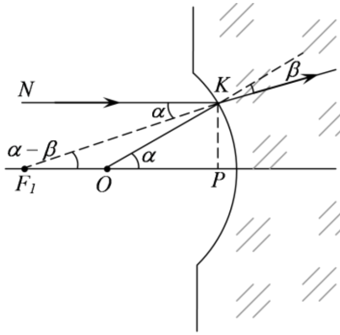

Рис. 58

Пусть лучи, параллельные оптической оси сферической поверхности, падают на нее из воздуха (рис. 58). Преломившись на поверхности, луч *NK* отклоняется на угол $\alpha-\beta$ от оптической оси. $OP\cdot tg\alpha = F_1P\cdot tg\alpha\cdot tg\left(\alpha-\beta\right)$. По закону преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n.$$

Ввиду малости рассматриваемых углов отсюда вытекает, что $r\alpha\approx f_1\left(\alpha-\beta\right)$ и $\alpha\approx\beta n$. Следовательно,

$$f_1=\frac{n}{n-1}r=nf.$$

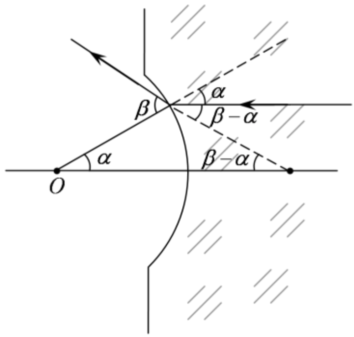

Рис. 59

Если же параллельные лучи падают из стекла (рис.59), то аналогичное рассмотрение приводит к уравнениям

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{1}{n},$$

$$r\cdot tg\alpha = f_2\cdot tg\left(\beta-\alpha\right).$$

Ввиду малости углов $\beta\approx n\alpha$, $r\alpha\approx f_2\left(\beta-\alpha\right)$. Отсюда

$$f_2=\frac{r}{n-1}=f.$$

44. Алмазный шарик ($n=2,4$) радиуса R посеребрен с задней стороны. На каком расстоянии d перед шариком должен быть расположен точечный источник света, чтобы лучи, преломившись на передней, образовали изображение, совпадающее с источником?

Решение:

Преломление лучей от источника на передней поверхности шарика описывается формулой

$$\frac{1}{d}+\frac{n}{f_1}=\frac{n-1}{R},$$

где f_1 – расстояние от изображения до передней поверхности. От задней (посеребренной) поверхности изображение находится на расстоянии $2R-f_1$. Отражение лучей в образовавшемся сферическом зеркале описывается формулой

$$\frac{1}{2R-f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{2}{R}.$$

Новое изображение находится на расстоянии f_2 от зеркальной задней поверхности и на расстоянии $2R-f_2$ от передней. Расчет преломления на передней поверхности производится по формуле

$$\frac{n}{2R-f_2}+\frac{1}{d}=\frac{n-1}{R},$$

где учтено, что окончательное изображение получается в воздухе на расстоянии d от шарика.

Решив систему трех уравнений, получим $d_1 = 5R$, $d_2 = -R$. Второе значение соответствует расположению источника в центре шарика, что противоречит условию.

45. Сферическая колба, толщина стенок которой ΔR значительно меньше ее радиуса R, изготовлена из стекла с показателем преломления п. Считая эту колбу оптической системой и рассматривая лишь лучи, близкие к прямой, проходящей через центр сферы, определить положение фокусов и главных плоскостей системы.

Решение:

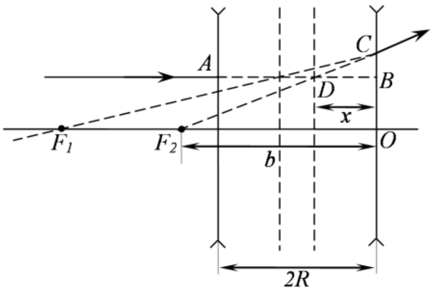

Рис. 60

Тонкую стенку сферической колбы можно рассматривать как рассеивающую линзу (рис.60) с фокусным расстоянием

$$f_1 = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} \approx \frac{R^2}{(n-1)\Delta R}.$$

Пройдя две такие линзы, расположенные на расстоянии $2R$ одна от другой, лучи, параллельные главной оптической оси (диаметру колбы), преломятся так, что их продолжения пересекутся в фокусе F_2 системы на расстоянии b от второй линзы, причем по формуле линзы

$$\frac{1}{f_1 + 2R} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f_1}.$$

Отсюда

$$b = \frac{f_1(f_1 + 2R)}{2(f_1 + R)}.$$

Точка D пересечения отрезка AB (продолжение падающего луча) и отрезка CF_2 (продолжение преломленного луча) лежит на главной плоскости системы, находящейся на расстоянии x от второй линзы.

Из подобия треугольника ACB и F_1CO, а также треугольников DCB и F_2CO следует, что

$$\frac{x}{b} = \frac{2R}{2R + f_1}$$

Главная плоскость лежит от второй линзы на расстоянии

$$x = \frac{2R \cdot b}{2R + f_1} = \frac{f_1 \cdot R}{f_1 + R}.$$

Следовательно, фокусное расстояние системы

$$f_2 = b - x = \frac{f_1^2}{2(f_1 + R)} \approx \frac{f_1}{2} = \frac{R^2}{2(n-1)\Delta R}.$$

В силу симметрии данной оптической системы положения второго фокуса и другой главной плоскости очевидны.

46. Почему в тех фотоаппаратах, в которых при наводке на резкость употребляется матовое стекло, не пользуются прозрачным стеклом?

Решение:

Матовое стекло нужно, во-первых, для того, чтобы фиксировать плоскость, в которой получается изображение, и, во-вторых, для увеличения угла зрения. Прозрачное стекло употребляется при рассматривании изображения, даваемого фотообъективом, в микроскоп. Для этого на прозрачном стекле наносят черту, которая фиксирует плоскость наводки, и добиваются резкого изображения, в микроскопе этой черты и прилегающего к ней участка картины, даваемой объективом. Матовое стекло в этом случае применено быть не может, так как в микроскоп будут видны все искажения, обусловленные структурой матовой поверхности.

47. При помощи линзы последовательно получают два изображения одного и того же предмета с увеличениями $k_1 = 5$ и

$k_2 = 2$. Во сколько раз изменилась освещенность экрана в месте получения изображения с переходом от одного увеличения к другому?

Решение:

Рассмотрим, от чего зависит освещенность изображения. Так как свет исходит от каждой точки протяженного источника, то световой поток *Ф*, попадающий на линзу, пропорционален площади источника, которая равна S_1. Кроме того, световой поток пропорционален телесному углу ω, под которым видна линза из точек источника. Если площадь линзы S_2, а расстояние от источника до линзы равно *d*, то $\omega = \dfrac{S_2}{d^2}$. Таким образом, $\Phi = BS_1\omega$, где коэффициент пропорциональности *B* характеризует яркость источника.

Световой поток *Ф* распределяется по площади изображения S_2. Поэтому освещенность изображения

$$E = \frac{\Phi}{S_3} = \frac{BS_1\omega}{S_3} = \frac{BS_1S_2}{S_3d^2}.$$

Отношение площадей источника и изображения равно отношению квадратов их расстояний от линзы:

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{d^2}{f^2}.$$

Следовательно, освещенность изображения $E = \dfrac{BS_2}{f^2}$ зависит при неизменных *B* и S_2 лишь от расстояния *f* между линзой и изображением. Используя формулу линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

и соотношение

$$k = \frac{f}{d},$$

легко найти $f = F(k+1)$. Поэтому искомое отношение освещенностей

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{f_1^2}{f_2^2} = \left(\frac{k_1+1}{k_2+1}\right)^2 = 4.$$

48. Близорукий человек, пределы аккомодации глаза которого лежат между $a_1 = 12\,см$ и $a_2 = 60\,см$, носит очки, с помощью которых может хорошо видеть удаленные предметы. Определить, на каком наименьшем расстоянии a_3 может этот человек читать книгу в очках.

Решение:

Рассматривая удаленные предметы через очки, человек видит их так же, как видел бы предметы, находящиеся на расстоянии $a_2 = 60\,см$, без очков. Поэтому для человека, вооруженного очками,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_0}.$$

Для человека без очков

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Здесь b – глубина глаза, $\frac{1}{f}$ – наименьшая оптическая сила глаза, $\frac{1}{f_0}$ – оптическая сила очков. Предполагается, что очки придвинуты вплотную к глазу. Отсюда $f_0 = -a_2$.

Определим теперь положение ближней точки аккомодации глаза, вооруженного очками:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1},$$

$$\frac{1}{a_3} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_0}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{a_3}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{f_0}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2},$$

и, следовательно, $a_3 = 15 см$.

49. Два человека – дальнозоркий и близорукий, надев свои очки, видят так же, как человек с нормальным зрением. Однажды они случайно поменялись очками. Надев очки близорукого дальнозоркий обнаружил, что он может отчетливо видеть только бесконечно удаленные предметы. На каком наименьшем расстоянии сможет читать мелкий шрифт близорукий в очках дальнозоркого?

Решение:

Надев чужие очки, дальнозоркий видит резко только очень удаленные предметы. Следовательно, расстояние a_2 наилучшего зрения глаза дальнозоркого определяется из уравнения

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}=D_1,$$

где a_1 – очень большое расстояние ($a_1 \to \infty$) – оптическая сила очков близорукого.

Оптическую силу D_2 очков, исправляющих дефект зрения дальнозоркого, можно найти по формуле

$$\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_2}=D_2,$$

где $a_1 = 0,25 см$ – расстояние наилучшего зрения нормального глаза. Расстояние a_3 наилучшего зрения близорукого глаза определится из уравнения

$$\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_3}=D_1.$$

Если же близорукий наденет очки дальнозоркого, то расстояние наилучшего зрения, т.е. минимальное расстояние а, на котором близорукий сможет без напряжения читать мелкий шрифт, можно определить по формуле

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a_3}=D_2.$$

Решив эти четыре уравнения, получим $a=12,5\,см$.

50. Предмет рассматривают невооруженным глазом с расстояния *l*. Каково будет угловое увеличение, если тот же предмет рассматривать в лупу, расположенную на расстоянии *r* от глаза и помещенную таким образом, что изображение находится на расстоянии *L* от глаза? Фокусное расстояние линзы равно *f*. Рассмотреть случаи: 1) $L=\infty$;2) $L=l$.

Решение:

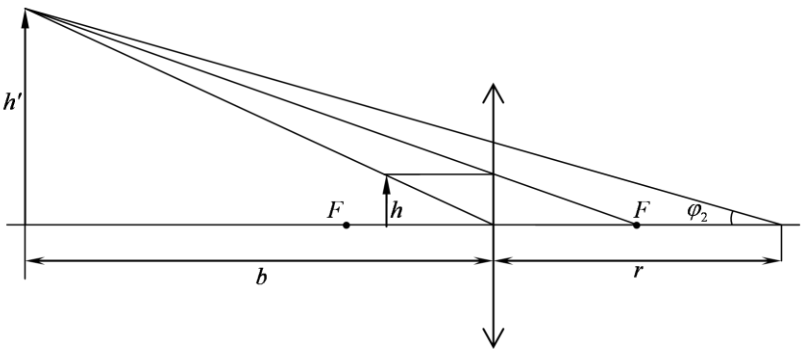

Рис. 61

При рассмотрении предмета высоты h с расстояния l угол зрения φ_1 (рис.61) определяется выражением

$$\varphi_1=\frac{h}{l}.$$

Если рассматривать тот же предмет в лупу, то

$$\varphi_2=\frac{h'}{b+r}=\frac{h'}{L},$$

где h' – высота изображения. Угловое увеличение

$$N=\frac{\varphi_2}{\varphi_1}=\frac{h'\cdot l}{h\cdot L}=\frac{k\cdot l}{L},$$

где $k = \frac{h'}{h} = \frac{b}{l} = \frac{f+d}{f}$ – линейное увеличение, определяемое по формуле линзы (f – фокусное расстояние). Следовательно,

$$N = \frac{l}{f} \cdot \frac{b+f}{L} = \frac{l}{f} \cdot \frac{L-r+f}{L}.$$

При $L = \infty$ $\quad N = \frac{l}{f}$.

При $L = l$ $\quad N = \frac{l}{f} + 1 - \frac{r}{f}$.

51. У оптической трубы, установленной на бесконечность, вынули объектив и заменили его диафрагмой диаметра D. При этом на некотором расстоянии от окуляра на экране получилось действительное изображение диафрагмы, имеющее диаметр d. Чему было равно увеличение трубы?

Решение:

Увеличение трубы

$$N = \frac{f_1}{f_2},$$

где f_1 – фокусное расстояние объектива, а f_2 – фокусное расстояние окуляра. Так как у установленной на бесконечность трубы расстояние между объективом и окуляром равно $f_1 + f_2$, то

$$\frac{D}{d} = \frac{f_1 + f_2}{b}.$$

Здесь b – расстояние от окуляра до изображения диафрагмы. По формуле линзы

$$\frac{1}{f_1 + f_2} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_2}.$$

Исключая из этих уравнений b, найдем

$$\frac{D}{d} = \frac{f_1}{f_2} = N.$$

52. При изготовлении двухлинзового объектива фотокамеры конструктор использовал рассеивающую линзу с фокусным расстоянием $f_1 = 5 см$, поместив ее на расстоянии $l = 45 см$ от пленки. Где необходимо поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $f_2 = 8 см$, чтобы на пленке получалось резкое изображение удаленных предметов?

Решение:

Резкие изображения удаленных предметов будут получаться при двух различных положениях собирающей линзы.

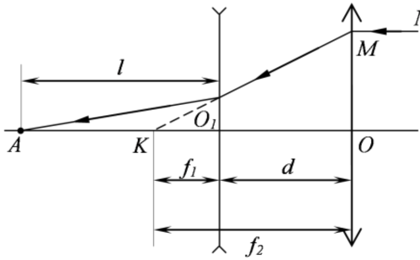

Рис. 62

Ее можно поместить перед рассеивающей линзой или за ней. Для первого расположения (рис.62) расстояние *d* между линзами можно найти, рассматривая точку *K* как мнимое изображение точки *A* в рассеивающей линзе:

$$\frac{1}{f_2 - d} + \frac{1}{l} = -\frac{1}{f_1}.$$

Луч *MN* параллелен оптической оси системы. Отсюда

$$d = f_2 - \frac{f_1 \cdot l}{f_1 + l} = 3,5 см.$$

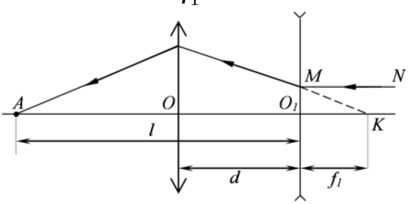

Рис. 63

Для второго расположения (рис. 63). Рассматривая точку *A* как изображение *K* в собирающей линзе, применим формулу линзы

$$\frac{1}{f_1+d}+\frac{1}{l-d}=\frac{1}{f_2}.$$

Отсюда

$$d=\frac{l-f_1}{2}\pm\frac{l+f_2}{2}\sqrt{1-\frac{4f_2}{l+f_1}}.$$

Расстояние между линзами может быть $d_2=35\,см$ или $d_3=5\,см$.

53. Для трех различных положений линз (рассеивающей – с фокусным расстоянием $f_1=5\,см$; собирающей – с фокусным расстоянием $f_2=8\,см$), рассчитать диаметр *D* изображения Луны на негативе. Поперечник Луны виден с Земли в среднем под углом $\varphi=31'5''\approx 0{,}9\cdot 10^{-2}\ рад$.

Решение:

Пусть лучи, идущие от одного из концов диаметра видимого диска Луны, направлены вдоль оптической оси системы. Они дадут изображение на оптической оси в точке *A*, отстоящей на расстояние $l=45\,см$ от рассеивающей линзы. Лучи, идущие от другого конца диаметра, составляют с первыми лучами по условию угол φ. Пройдя систему, они дадут изображение (точка *B*), лежащее в плоскости, перпендикулярной оптической оси и отстоящей от рассеивающей линзы на то же расстояние *l*.

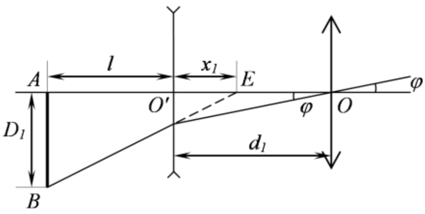

Рис. 64

Для нахождения диаметра изображения $D_1 = AB$ рассмотрим ход луча, проходящего через оптический центр первой линзы (рис. 64). При первом расположении линз собирающая линза помещена перед рассеивающей на расстоянии $d_1 = 3,5\,см$. В этом случае, рассматривая точку E как мнимое изображение точки O, можно написать

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{x_1} = -\frac{1}{f_1}.$$

Используя подобие треугольников ABE и $O'PE$ и учитывая, что $O'P = d_1 tg\varphi$, получим

$$\frac{D_1}{l + x_1} = \frac{d_1 tg\varphi}{x_1} \approx \frac{d_1\varphi}{f_1}.$$

Исключая x_1 из данных уравнений, найдем $D_1 = 0,72\,см$.

Для второго расположения линз (рис.65) $d_2 = 35\,см$. Размер изображения Луны D_2 можно найти из уравнений

$$\frac{D_2}{(x_2 + d_2) - l} = \frac{d_2 tg\varphi}{x_2} \approx \frac{d_2\varphi}{x_2}$$

(рассматривая треугольники EOP, EAB и OPO'),

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_2}$$

(рассматривав E как изображение O'). Отсюда $D_2 \approx 0,011\,см$.

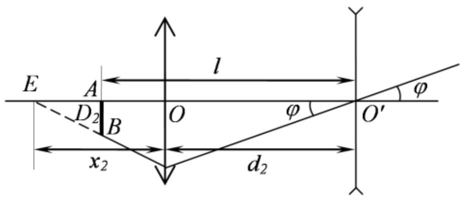

Рис. 65

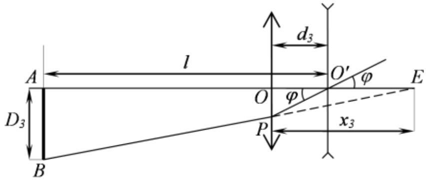

Рис. 66

Для третьего расположения ($d_3 = 5 см$) ход лучей будет несколько иным (рис.66). Уравнения для определения D_3 запишутся по аналогии с предшествующими случаями так:

$$\frac{D_3}{(l-d_3)+x_3} = \frac{d_3 tg\varphi}{x_3} \approx \frac{d_3\varphi}{x_3},\ \frac{1}{d_3} - \frac{1}{x_3} = \frac{1}{f_2}.$$

Отсюда $D_3 = 0{,}18 см$.

54. Главное фокусное расстояние объектива микроскопа $f_{об} = 3 мм$, окуляра $f_{ок} = 5 см$. Предмет находится от объектива на расстоянии $a = 3{,}1 см$. Найти увеличение микроскопа для нормального глаза. Рассмотреть случаи:
изображение располагается на расстоянии $d = 25 см$;
в глаз из окуляра идут параллельные пучки лучей.

Решение:

Из формулы линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F_{об}}$$

следует, что увеличение объектива

$$k_1 = \frac{b}{a} = \frac{F_{об}}{a - F_{об}}.$$

Действительное обратное увеличенное изображение предмета, даваемое объективом, рассматривается через окуляр, как через лупу, причем в первом случае мнимое изображение, даваемое этой лупой, располагается от глаза на расстоянии $d = 25 см$. По формуле лупы

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{d} = \frac{1}{F_{ок}},$$

где a_1 – расстояние изображения, даваемого объективом, до окуляра. Увеличение окуляра

$$k_2 = \frac{d}{a_1} = \frac{d + F_{ок}}{F_{ок}} = 30.$$

Полное увеличение микроскопа $k = k_1 k_2 = 180\ раз$. Во втором случае $k_2 = \dfrac{d}{F_{ок}} = 5$ и $k = k_1 k_2 = 150\ раз$.

55. Найти положение главных и фокальных плоскостей стеклянной линзы (в воздухе): передняя поверхность линзы выпуклая (R_1 = 6,5 *см*), задняя вогнутая (R_2 = 13 *см*). Толщина линзы 3,5 *см*.

Решение:

Оптическая сила толстой линзы определяется по формуле:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n}\Phi_1 \cdot \Phi_2,$$

где $\Phi_1 = \dfrac{n - n_0}{R_1}$ и $\Phi_2 = \dfrac{n - n_0}{R_2}$ – оптические силы поверхностей линзы.

Тогда:

$$\Phi_1 = \frac{1{,}5 - 1}{6{,}5} = 0{,}077\ \ 1/см;$$

$$\Phi_2 = -\frac{1{,}5 - 1}{13} = -0{,}0385\ \ 1/см,$$

$$\Phi = 0{,}077 - 0{,}0385 + \frac{3{,}5}{1{,}5} \cdot 0{,}077 \cdot 0{,}0385 = 0{,}0454\ \ 1/см.$$

Расстояния до главных оптических плоскостей от вершин *O* и *O'* линзы (рис. 67) определяются по формулам:

$$x = \frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_2}{\Phi} = -\frac{3{,}5}{1{,}5} \cdot \frac{0{,}0385}{0{,}0454} = -1{,}98\ см \approx -2\ см$$

$$x' = -\frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_1}{\Phi} = -\frac{3{,}5}{1{,}5} \cdot \frac{0{,}077}{0{,}0454} = -3{,}94\ см \approx -4\ см$$

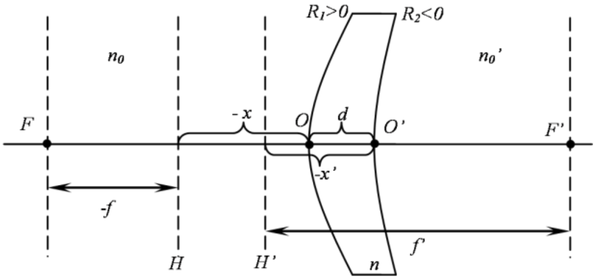

Рис. 67

Фокусные расстояния линзы равны:

$$f' = \frac{n_0'}{\Phi} = \frac{1}{0{,}0454} = 22\ \text{см}\ ;$$

$$f = -\frac{n_0}{\Phi} = -\frac{1}{\Phi} = -\frac{1}{0{,}0454} = -22\ \text{см}$$

56. Плоско-выпуклая линза с радиусом кривизны 30 *см* и показателем преломления 1,5 дает изображение предмета с увеличением равным 2. Найти расстояние предмета и изображения от линзы.

Решение:

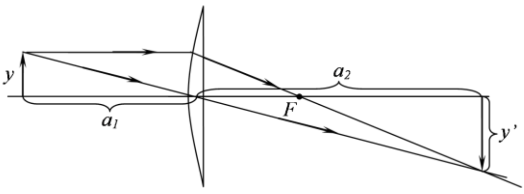

Рис. 68

Запишем формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{F} = -\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

и увеличение:

$$k = \frac{y'}{y} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Выразим a_2 (рис. 68) из $k = \frac{y'}{y} = \frac{a_2}{a_1}$ и подставим в $\frac{1}{F} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$:

$$a_2 = k \cdot a_1;\ -\left(-\frac{1}{a_1}\right) + \frac{1}{k \cdot a_1} = (n-1)\cdot\left(-\frac{1}{R_2}\right),$$

где знаки «+» берутся по направлению луча, а знаки «–» против направления луча, тогда:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_1} = (1{,}5-1)\cdot\left(-\frac{1}{30}\right),$$

$$\frac{1}{a_1}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right) = -\frac{0{,}5}{30},$$

$$a_1 = \frac{3\cdot 30}{2\cdot 0{,}5} = 90\,см;$$

$$a_2 = 180\,см$$

57. Горизонтально расположенное вогнутое зеркало заполнено водой. Радиус зеркала 60 *см*. Каково фокусное расстояние такой системы? Наибольшая глубина воды в зеркале мала по сравнению с радиусом сферы.

Решение:

Параллельные лучи отражаются от зеркальной сферы и (в отсутствии воды) (рис.69) собрались бы в фокусе на расстоянии $F_1 = \frac{R}{2}$ от вершины зеркала.

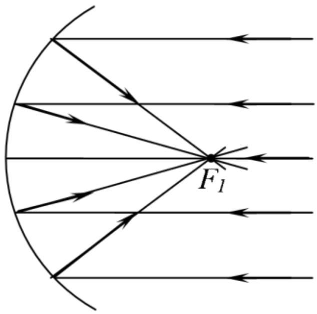

Рис. 69

Аналогичная картина наблюдалась бы, если бы у нас была линза с оптической силой

$$D_1 = \frac{1}{F_1} = \frac{2}{R},$$

а лучи шли бы с другой стороны:

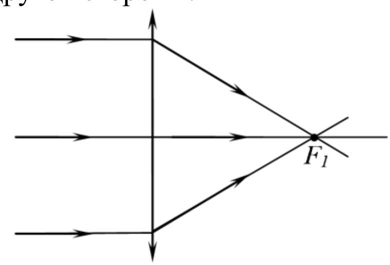

Рис. 70

Вода играет роль линзы (рис. 70) с оптической силой:

$$D_2 = \frac{n-1}{R},$$

где $n = 1{,}33$ показатель преломления воды.

Оптическая сила двух линз: $D = D_1 + D_2$,

$$D = \frac{2}{R} + \frac{n-1}{R} = \frac{1}{R}(2 + n - 1) = \frac{n-1}{R}.$$

По определению

$$F = \frac{1}{D}.$$

Тогда

$$F = \frac{R}{n+1}.$$

$$F = \frac{0{,}6}{1{,}33+1} = 0{,}2575\,м \approx 0{,}26\,м.$$

58. Лучи света проходят сквозь тонкую собирающую линзу ($D = +5\,дптр$), отражаются от поставленного сзади нее плоского зеркала и вновь проходят сквозь линзу (рис. 71).

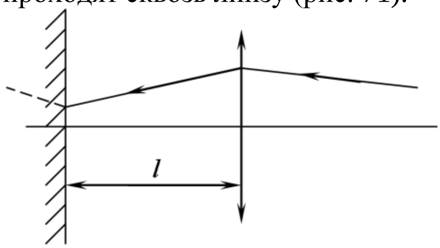

Рис. 71

Какова оптическая сила такой системы, если отражающая поверхность зеркала отстоит от второй главной плоскости линзы на расстоянии 6 *см*.

Решение:

Данная оптическая система эквивалентна следующей оптической системе (рис.72):

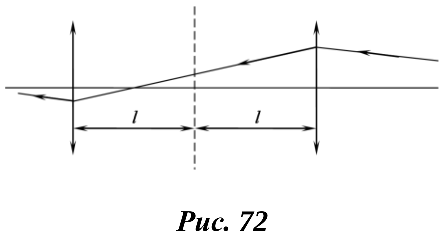

Рис. 72

Для системы из тонких линз, расстояние между которыми $d = 2l$ оптическая сила вычисляется по формуле:

$$D = D_1 + D_2 - d \cdot D_1 \cdot D_2,$$

но у нас $D_1 = D_2$, а $d = 2l$, тогда

$$D = 2D_1 - 2l \cdot D_1^2 = 2D_1(1 - D_1 \cdot l),$$

$$D = 2 \cdot 5 \cdot (1 - 5 \cdot 0{,}06) = 7\,\text{дптр}.$$

59. Записать в векторном виде закон отражения светового луча от зеркала через направляющие орты $\vec{e}$ и $\vec{e}\,'$ падающего и отраженного лучей и орт $\vec{n}$ внешней нормали к поверхности зеркала.

Решение:

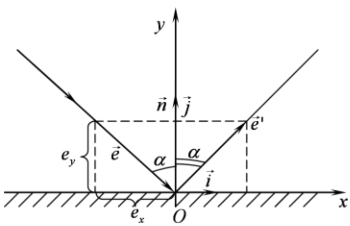

Рис. 73

$\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты осей координат x и y (рис.73). $\vec{n} = \vec{j}$, $|\vec{e}| = 1$, $|\vec{e}\,'| = 1$, $|\vec{n}| = 1$.

Разложим вектора $\vec{e}$ и $\vec{e}\,'$ на оси координат:

$$\left.\begin{aligned} \vec{e} &= e_x\vec{i} + e_y\vec{j} \\ \vec{e}\,' &= e'_x\,\vec{i} + e'_y\,\vec{j} \end{aligned}\right\}$$

где:

$$\left.\begin{aligned} e_x &= e'_x = |\vec{e}| \cdot \sin\alpha = \sin\alpha \\ e_y &= -e'_y = |\vec{e}| \cdot \cos\alpha = -\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

где $\cos\alpha = -\dfrac{(\vec{e},\vec{n})}{|\vec{e}|\cdot|\vec{n}|} = -(\vec{e},\vec{n}) = (\vec{e}\,',\vec{n})$

Подставив $\left.\begin{aligned} e_x &= \sin\alpha \\ e_y &= -\cos\alpha \end{aligned}\right\}$ в $\left.\begin{aligned} \vec{e} &= e_x\vec{i} + e_y\vec{j} \\ \vec{e}\,' &= e'_x\,\vec{i} + e'_y\,\vec{j} \end{aligned}\right\}$ запишем:

$$\vec{e} = (\sin\alpha)\cdot\vec{i} - (\cos\alpha)\cdot\vec{j}\,,$$
$$\vec{e}\,' = (\sin\alpha)\cdot\vec{i} - (\cos\alpha)\cdot\vec{j}\,,$$

Откуда:

$$\vec{e}\,' = (\sin\alpha)\cdot\vec{i} - (\cos\alpha)\cdot\vec{j} + (2\cos\alpha)\cdot\vec{j} = \vec{e} - 2(\vec{e},\vec{n})\cdot\vec{n}$$

т. е. $\vec{e}\,' = \vec{e} - 2(\vec{e},\vec{n})\cdot\vec{n}$.

60. При каком значении угла падения α луч света, отраженный от поверхности воды, будет перпендикулярен к преломленному лучу?

Решение:

По закону преломления света:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n\,.$$

По условию задачи:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha\,,$$

тогда $\sin\gamma = \cos\alpha$, т. е. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = n$ или $tg\alpha = n$, откуда

$$\alpha = arctg(n) = arctg(1{,}33) = 53°.$$

61. Вывести с помощью принципа Ферма законы отражения и преломления света на плоской границе раздела двух сред.

Решение:

Принцип Ферма это принцип критического оптического пути (или минимального времени распространения). Иными словами свет из точки *A* в точку *B* идет по пути на который затрачивается минимальное время.

Рассмотрим преломление света на плоской границе раздела двух сред с показателем преломления n_1 и n_2 (рис.74).

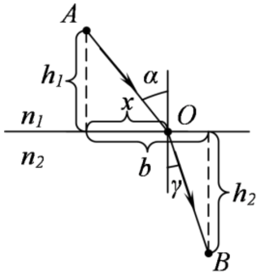

Рис. 74

На рисунке 74 $AO = \sqrt{h_1^2 + x^2}$, $OB = \sqrt{h_2^2 + (b-x)^2}$.

Время, затраченное лучом на прохождение пути *AOB* равно

$$t = \frac{AO}{\upsilon_1} + \frac{OB}{\upsilon_2},$$

где v_1 и v_2 скорости луча в первой и во второй средах.

$$t = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{\upsilon_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (b-x)^2}}{\upsilon_2}.$$

Из условия минимальности времени $\frac{dt}{dx} = 0$;

$$\frac{1}{\upsilon_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{1}{\upsilon_2} \cdot \frac{b-x}{\sqrt{h_2^2 + (b-x)^2}} = 0,$$

т. е. $\frac{\sin\alpha}{\upsilon_1} - \frac{\sin\gamma}{\upsilon_2} = 0$,

Откуда следует $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{n_2}{n_1}$ – закон преломления света.

При $n_2 = n_1$; $\sin\alpha = \sin\gamma$ и $\alpha = \gamma$ – закон отражения света.

62. Луч света падает на плоскопараллельную пластину из стекла толщенной d = 6 *см*. Угол падения α = 60º. Найти величину смещения луча, прошедшего через эту пластину.

Решение:

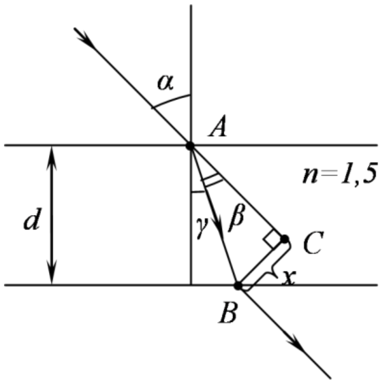

Рис. 75

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (рис. 75), $BC = x$ – искомая величина, $\beta + \gamma = \alpha$.

$$CB = AB \cdot \sin\beta,$$

$\dfrac{d}{AB} = \cos\gamma$, тогда $AB = \dfrac{d}{\cos\gamma}$

Из $CB = AB \cdot \sin\beta$ и $AB = \dfrac{d}{\cos\gamma}$ имеем:

$$CB = \frac{d \cdot \sin(\alpha - \gamma)}{\cos\gamma} = d \cdot (\sin\alpha - \cos\alpha \cdot tg\gamma).$$

По закону преломления света:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n \Rightarrow \sin\alpha = n \cdot \sin\gamma,$$

откуда

$$tg\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}.$$

Подставим $tg\gamma = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}$ в $CB = d\cdot(\sin\alpha - \cos\alpha\cdot tg\gamma)$:

$$x = CB = (d\cdot\sin\alpha)\cdot\left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right).$$

Подставим числовые значения:

$$x = \frac{6\cdot 10^{-2}\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt{2,25 - 0,75}}\right) =$$

$$= 3,17\cdot\left(1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt{1,5}}\right)\cdot 10^{-2} = 3,1\cdot 10^{-2}\,м = 3,1\,см.$$

63. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 25$ *см* проецирует изображение предмета на экран, отстоящий от линзы на расстоянии b=5 *м*. Экран придвинули к линзе на Δb = 18 *см*. На сколько следует переместить предмет, чтобы опять получилось четкое изображение его на экране?

Решение:

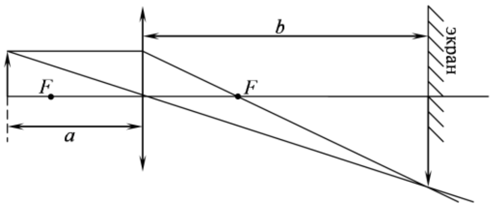

Рис. 76

В исходном положении (рис. 76) формула запишется в виде:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где $a > 0,\ b > 0,\ F > 0.$

После перемещения экрана и предмета:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a + \Delta a} + \frac{1}{b - \Delta b}.$$

Т.к. b и a изменяются и $\Delta b << b$, продифференцируем $\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$:

$$-\frac{1}{a^2}da - \frac{1}{b^2}db = 0$$

и выразим отсюда Δa: $\Delta a = -\frac{a^2}{b^2}\Delta b$.

Но т. к. Δb по условию задачи отрицательно:

$$\Delta a = \frac{a^2}{b^2}\Delta b.$$

Из $\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ выразим a:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{F} - \frac{1}{b} \Rightarrow a = \frac{b \cdot F}{b - F}.$$

Подставим $a = \frac{b \cdot F}{b - F}$ в $\Delta a = \frac{a^2}{b^2}\Delta b$:

$$\Delta a \approx \frac{F^2 \cdot \Delta b}{(b - F)^2}$$

$$\Delta a \approx \frac{25^2 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}18}{(5 - 0{,}25)^2} = 0{,}5\,мм.$$

64. Оптические силы объектива и окуляра микроскопа равны соответственно 100 и 20 *дптр*. Увеличение микроскопа равно 50. Каково будет увеличение этого микроскопа, если расстояние между объективом и окуляром увеличить на 2 *см*?

Решение:

Найдем F объектива и F окуляра:

$$F_1 = \frac{1}{D_1} = \frac{1}{100}\,м = 0{,}01\,м,$$

$$F_2 = \frac{1}{D_2} = \frac{1}{20}\,м = 0{,}05\,м.$$

Изобразим ход лучей в микроскопе (рис.77):

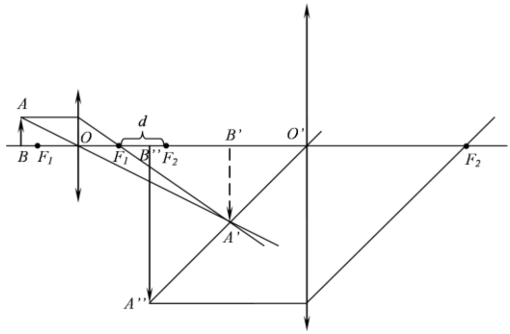

Рис. 77

На рис.77: AB – предмет; $A'B'$ – изображение в объективе; $A''B''$ - изображение в окуляре.

Используя подобие треугольников ABO, $A'B'O$, $A''B''O$ можно найти увеличение микроскопа:

$$k = \frac{A''B''}{AB} = L \cdot d \cdot D_1 \cdot D_2,$$

где L – расстояние наилучшего зрения (L = 0,25 *м*), d – расстояние между фокусами объектива и окуляра.

По условию задачи:

$$k_1 = 50 = 0{,}25 \cdot 100 \cdot 20 \cdot d_1,$$

отсюда

$$d_1 = \frac{50}{0{,}25 \cdot 100 \cdot 20} = 0{,}1\,м.$$

Тогда

$$k_2 = 0{,}25 \cdot 0{,}12 \cdot 100 \cdot 20 = 60.$$

65. Луч света проходит через призму с преломляющим углом Θ и показателем преломления n. Пусть γ – угол отклонения луча. Показать, что при симметричном ходе луча через призму угол γ минимален.

Решение:

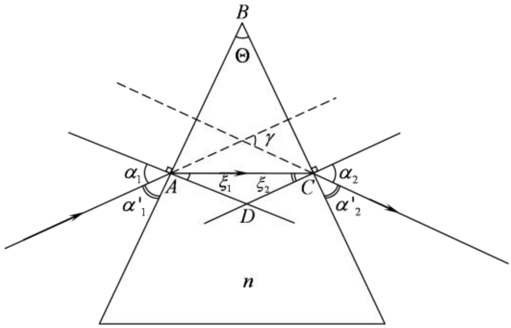

Рис. 78

α_1 – угол падения, ξ_1 – угол преломления (рис. 78).

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$:

$$\angle BAD = \angle BCD = \frac{\pi}{2},$$

так как сумма углов четырехугольника равна 2π , то

$$\angle ADC = \pi - \Theta.$$

Из треугольника ADC имеем:

$$\xi_1 + \xi_2 + \pi - \Theta = \pi \text{ или } \xi_1 + \xi_2 = \Theta .$$

В четырехугольнике $AECD$ $\angle EAD = \alpha_1$, а $\angle ECD = \alpha_2$

$$\angle AEC = \pi - \gamma \text{; } \angle ADC = \pi - \Theta,$$

тогда

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \pi - \gamma + \pi - \Theta = 2\pi ,$$

откуда

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \Theta + \gamma .$$

Запишем закон преломления света:

$$\sin\alpha_1 = n \cdot \sin\xi_1,$$

$$\sin\alpha_2 = n \cdot \sin\xi_2.$$

Из $\xi_1 + \xi_2 = \Theta$ получим:

$$d\xi_1 + d\xi_2 = 0 ,$$

так как $\Theta = const$ или $d\xi_1 = -d\xi_2$

Из $\alpha_1 + \alpha_2 = \Theta + \gamma$:

$$d\gamma = d\alpha_1 + d\alpha_2.$$

Из $\sin\alpha_1 = n \cdot \sin\xi_1$:

$$(\cos\alpha_1) d\alpha_2 = n \cdot (\cos\xi_1) d\xi_1.$$

Из $\sin\alpha_2 = n \cdot \sin\xi_2$:

$$(\cos\alpha_2) d\alpha_2 = n \cdot (\cos\xi_2) d\xi_2.$$

Из $d\gamma = d\alpha_1 + d\alpha_2$, $(\cos\alpha_1) d\alpha_2 = n \cdot (\cos\xi_1) d\xi_1$, $(\cos\alpha_2) d\alpha_2 = n \cdot (\cos\xi_2) d\xi_2$ с учетом $d\xi_1 = -d\xi_2$ получим:

$$d\gamma = n\left(\frac{\cos\xi_1}{\cos\alpha_1} - \frac{\cos\xi_2}{\cos\alpha_2}\right) \cdot \frac{\cos\alpha_1}{n \cdot \cos\xi_1} d\xi_1 = d\alpha_1 - \left(\frac{\cos\xi_2}{\cos\xi_1}\right) \cdot \left(\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}\right) d\alpha_1$$

Тогда

$$d\gamma = \left(1 - \left(\frac{\cos\xi_2}{\cos\xi_1}\right) \cdot \left(\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}\right)\right) \cdot d\alpha_1$$

$$\frac{d\gamma}{d\alpha_1} = 1 - \frac{\cos\xi_2}{\cos\xi_1} \cdot \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}.$$

При симметричном ходе луча $\alpha_1 = \alpha_2$ и $\xi_1 = \xi_2$, тогда производная $\frac{d\gamma}{d\alpha_1} = 1 - \frac{\cos\xi_2}{\cos\xi_1} \cdot \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}$ равна нулю:

$$\frac{d\gamma}{d\alpha_1} = 0.$$

Из $d\gamma = \left(1 - \left(\frac{\cos\xi_2}{\cos\xi_1}\right) \cdot \left(\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}\right)\right) \cdot d\alpha_1$ следует, что $d^2\gamma = d^2\alpha_1$, т. е.

$$\frac{d^2\gamma}{d^2\alpha_1} = 1 > 0.$$

Тем самым доказано, что при симметричном ходе луча через призму угол отклонения минимален.

66. Источник света находится на расстоянии $l = 90\,см$ от экрана. Токая собирающая линза, помещена между источником света и экраном, дает четкое изображение источника при двух положениях, расстояние между которыми $\Delta l = 30\,см$. Определить фокусное расстояние линзы.

Решение:

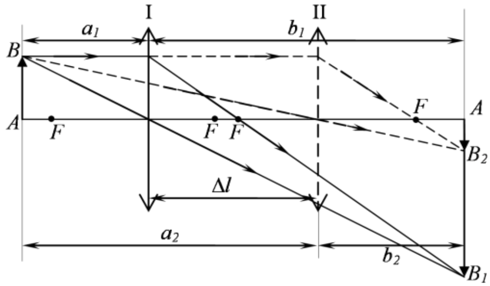

Рис. 79

Запишем формулу тонкой линзы для I и II положения линзы (рис. 79):

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1};$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2}.$$

Из этих формул следует:

$$\frac{a_1 + b_1}{a_1 b_1} = \frac{1}{F} \Rightarrow a_1 \cdot b_1 \cdot F = l,$$

т. к. $l = a_1 + b_1$

$$\frac{a_2 + b_2}{a_2 b_2} = \frac{1}{F} \Rightarrow a_2 \cdot b_2 \cdot F,$$

т. к. $l = a_2 + b_2$.

По теореме Виета a_i и b_i корни одного и того же квадратного уравнения:

$$x^2 - lx + Fl = 0,$$

тогда

$$x_1 = a_1 = b_2,$$

$$x_2 = b_1 = a_2,$$

т. е.

$$a_1 = b_2;\ a_2 = b_1$$

По условию задачи:

$$a_1 + b_1 = l,$$

$$a_1 + \Delta l + b_2 = l.$$

Подставим $a_1 = b_2$; $a_2 = b_1$ в $a_1 + \Delta l + b_2 = l$:

$$2a_1 = l - \Delta l,$$

т. е. $a_1 = \frac{l - \Delta l}{2}$;

Подставим $a_1 = \frac{l - \Delta l}{2}$ в $a_1 + b_1 = l$:

$$b_1 = l - \frac{l - \Delta l}{2} = \frac{l + \Delta l}{2};$$

из формулы линзы получим:

$$F = \frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} = \frac{l - \Delta l}{2} \cdot \frac{l + \Delta l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{l^2 - (\Delta l)^2}{4l}$$

$$F = \frac{l^2 - (\Delta l)^2}{4l};$$

$$F = \frac{0{,}9^2 - 0{,}3^2}{4 \cdot 0{,}9} = 0{,}2\,м.$$

67. Между предметом и экраном, положения которых неизменны, помещают тонкую собирающую линзу. Перемещением линзы находят два положения, при которых на экране образуется

четкое изображение предмета. Найти поперечный размер предмета, если при одном положении линзы размер изображения $h' = 2\,мм$, а при другом $h'' = 4,5\,мм$.

Решение:

Ход лучей в первом и втором положениях линзы покажем на рис.80:

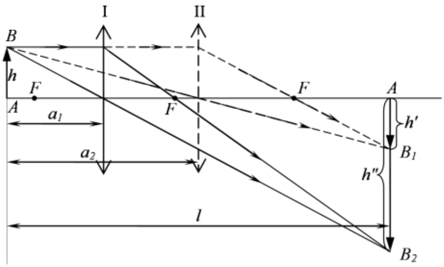

Рис. 80

По формуле линзы

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{l-a}=\frac{1}{F}\Rightarrow\frac{l-a+a}{(l-a)a}=\frac{1}{F};$$

$$lF = la - a^2 \text{ или } a^2 - la + lF = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения:

$$a_{1,2}=\frac{l}{2}\pm\sqrt{\frac{l^2}{4}-lF}=\frac{l}{2}\pm\Delta,$$

или

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{l}{2}-\Delta, \\ a_2 = \dfrac{l}{2}+\Delta. \end{cases}$$

Из подобия треугольников:

$$\begin{cases} \dfrac{h}{h'}=\dfrac{a_2}{l-a_2}, \\ \dfrac{h}{h''}=\dfrac{a_1}{l-a_1}. \end{cases}$$

Подставим $\begin{cases} a_1 = \dfrac{l}{2} - \Delta, \\ a_2 = \dfrac{l}{2} + \Delta. \end{cases}$ в $\begin{cases} \dfrac{h}{h'} = \dfrac{a_2}{l - a_2}, \\ \dfrac{h}{h''} = \dfrac{a_1}{l - a_1}. \end{cases}$:

$$\begin{cases} \dfrac{h}{h'} = \dfrac{l/2 + \Delta}{l/2 - \Delta} = z \Rightarrow h = zh', \\ \dfrac{h}{h''} = \dfrac{l/2 - \Delta}{l/2 + \Delta} = \dfrac{1}{z} \Rightarrow h = \dfrac{h''}{z}. \end{cases}$$

Тогда $h^2 = h' \cdot h''$, откуда $h = \sqrt{h' \cdot h''}$

$$h = \sqrt{2 \cdot 4{,}5} = 3\,мм.$$

68. Найти оптическую силу и фокусное расстояние тонкой стеклянной линзы в жидкости с показателем преломления $n_1 = 1{,}7$, если ее оптическая сила в воздухе $D_0 = -5\,дптр$.

Решение:

Согласно формуле тонкой линзы:

$$D_1 = \frac{1}{F_1} = \left(\frac{n}{n_1} - 1 \right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

В отсутствии жидкости формула переписывается в виде:

$$D_0 = \frac{1}{F_0} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

поделим $D_1 = \left(\dfrac{n}{n_1} - 1 \right)\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} \right)$ на $D_0 = (n-1)\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} \right)$:

$$\frac{D_1}{D_0} = \frac{\left(n/n_1 - 1 \right)}{n-1} = \frac{n - n_1}{n_1(n-1)},$$

$$D_1 = D_0 \frac{n - n_1}{n_1(n-1)},$$

подставим числа:

$$D_1 = -5\frac{1,5 - 1,7}{1,7(1,5-1)} = 1,118\,\textit{дптр}.$$

Заметим, что $D_1 > 0$, следовательно рассеивающая линза в жидкости с $n_1 > n$ становится собирающей.

Найдем F_1:

$$F_1 = \frac{1}{D_1};$$

$$F_1 = \frac{1}{1,118} = 0,85\,\textit{м}.$$

F_1 тоже больше нуля.

69. Имеются две тонкие симметричные линзы: одна собирающая с показателем преломления $n_1 = 1,7$, а другая рассеивающая с $n_2 = 1,51$. Обе линзы имеют одинаковые радиусы кривизны поверхностей $R = 10\,\textit{см}$. Линзы сложили вплотную и погрузили. Каково фокусное расстояние этой системы в воде?

Решение:

Согласно формуле тонкой линзы:

$$\frac{1}{F} = D = \left(\frac{n_{стекла}}{n_{среды}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\partial.$$

В этой формуле R_1 и R_2 радиусы кривизны поверхности линзы. R_1 и R_2 больше нуля для выпуклых поверхностей и меньше нуля для вогнутых поверхностей.

Запишем формулы определяющие оптическую силу первой и второй линзы в воде:

а) для собирающей линзы:

$$D_1=\left(\frac{n_1}{n}-1\right)\frac{2}{R}=\frac{1,7-1,33}{1,33}\cdot\frac{2}{0,1}>0,$$

б) для рассеивающей линзы:

$$D_2=-\left(\frac{n_2}{n}-1\right)\frac{2}{R}=-\frac{1,51-1,33}{1,33}\cdot\frac{2}{0,1}<0.$$

Для сложения в воде линзы $D=D_1+D_2$, тогда:

$$D=\frac{(1,7-1,33)\cdot 2}{1,33\cdot 0,1}+\left(-\frac{(1,51-1,33)\cdot 2}{1,33\cdot 0,1}\right)=\frac{0,38}{1,33\cdot 0,1}=2,85\,дптр.$$

$D>0$, следовательно составная линза в воде собирающая.

По определению $F=\dfrac{1}{D}$;

$$F=\frac{1}{2,85}=0,35\,м=35\,см.$$

70. Определить фокусное расстояние вогнутого сферического зеркала, которое представляет собой тонкую симметричную двояковыпуклую стеклянную линзу с посеребренной одной поверхностью. Радиус кривизны поверхности линзы $R=40\,см$.

Решение:

Изобразим нашу систему (рис.81):

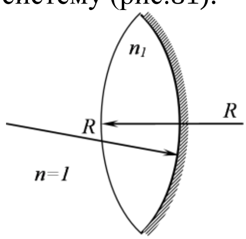

Рис. 81

Для решения задачи применим свойство аддитивности оптических сил: если оптические приборы (линзы, зеркала) сложены вплотную друг к другу, то их оптические силы складываются.

В нашем случае луч пройдя линзу и отразившись от зеркальной поверхности, вновь проходит через линзу. То есть линза проходится лучом два раза, поэтому:

$$D = 2D_{линзы} + D_{зеркала}.$$

У зеркала $F = \frac{R}{2}$, следовательно $D_{зеркала} = \frac{2}{R}$.

У линзы $D_{линзы} = \frac{1}{F_{линзы}} = \left(\frac{n}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = (n-1)\cdot\frac{2}{R}$

Тогда $D_{системы}$:

$$D = 2(n-1)\frac{2}{R} + \frac{2}{R} = \frac{2}{R}(2n-2+1) = (2n-1)\frac{2}{R},$$

$$F = \frac{1}{D} = \frac{R}{2(2n-1)},$$

$$F = \frac{0,4}{2(2\cdot 1,5-1)} = 0,1\,м = 10\,см.$$

71. Галилеева труба 10-кратного увеличения при установке на бесконечность имеет длину $45\,см$. Определить на какое расстояние надо передвинуть окуляр трубы, чтобы ясно видеть предметы на расстоянии $50\,м$?

Решение:

В зрительной трубе, установленной на бесконечность, расстояние между объективом и окуляром равно сумме фокусных расстояний объектива и окуляра:

$$L = F_1 + F_2$$

где F_1 - фокусное расстояние объектива, F_2 - фокусное расстояние окуляра.

Увеличение Галилеевой трубы равно:

$$k = -\frac{F_1}{F_2} > 0,$$

т. к. $F_2 < 0$, поэтому что в Галилеевой трубе в качестве окуляра используется рассеивающая линза. Нарисуем Галилееву трубу при ее установлении на бесконечность (рис.82):

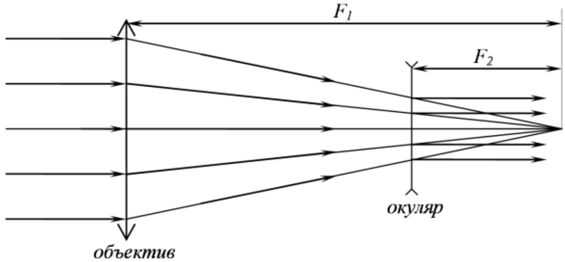

Рис. 82

Из $L = F_1 + F_2$ и $k = -\dfrac{F_1}{F_2} > 0$ получим:

$$L = F_1 - \frac{F_1}{k} \Rightarrow kL = kF_1 - F_1,$$

откуда

$$F_1 = \frac{kL}{k-1}.$$

Изображение бесконечно удаленных предметов расположено в фокальной плоскости объектива. Изображения предметов, расположенных на расстоянии a от объектива, будет находиться на расстоянии b от объектива:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F_1} \Rightarrow b = \frac{aF_1}{a - F_1}.$$

Таким образом, изображения сместится на величину $\Delta = b - F_1$. Чтобы в окуляр вновь четко увидеть изображение, нужно окуляр передвинуть на такую же величину:

$$\Delta = b - F_1 = \frac{aF_1}{a - F_1} - F_1 = \frac{aF_1}{a - F_1}.$$

По формуле $F_1 = \dfrac{kL}{k-1}$ вычислим F_1:

$$F_1 = \frac{10 \cdot 0,45}{10-1} = 0,5\,м = 50\,см.$$

А теперь вычислим Δ:

$$\Delta = \frac{50 \cdot 0,5^2}{50-0,5} = 0,005\,м = 5\,мм.$$

Надо отодвинуть окуляр на $\Delta = 0,5\,см$.

72. Параллельный пучок света падает из вакуума на поверхность, которая ограничивает область с показателе преломления n. Найти форму этой поверхности – уравнение $x(r)$, при котором пучок будет сфокусирован в точке F на расстоянии f от вершины поверхности О. Пучок какого максимального радиуса сечения может быть сфокусирован.

Решение:

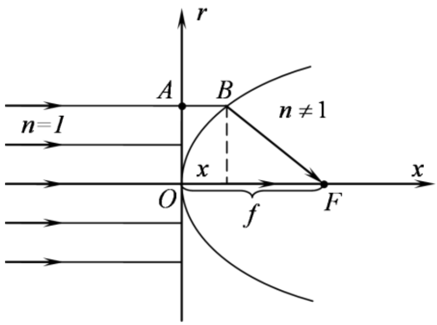

Рис. 83

По законам весь световой пучок падающий на поверхность должен собираться в точке F одновременно. Поэтому время хода осевого луча OF должно быть равно времени хода произвольного луча ABF (рис. 83):

$$\frac{nf}{c}=\frac{x}{c}+\frac{n\sqrt{r^2+\left(f-x\right)^2}}{c},$$

откуда получим

$$nf-x=n\sqrt{r^2+\left(f-x\right)^2}.$$

В левой части прибавим и вычтем f:

$$nf-f+f-x=n\sqrt{r^2+\left(f-x\right)^2},$$

тогда

$$\left(n-1\right)f+\left(f-x\right)=n\sqrt{r^2+\left(f-x\right)^2}.$$

Обозначим $f-x=z$:

$$\left(n-1\right)f+z=n\sqrt{r^2+z^2}.$$

Возведем обе части $\left(n-1\right)f+z=n\sqrt{r^2+z^2}$ в квадрат:

$$\left(n-1\right)^2 f^2+2\left(n-1\right)fz+x^2=n^2r^2+n^2z^2,$$

$$\left(n^2-1\right)z^2-2\left(n-1\right)fz+n^2r^2-\left(n-1\right)^2 f^2=0,$$

полученное выражение разделим на n^2-1:

$$z^2-\frac{2f}{n+1}z+\frac{n^2r^2-\left(n-1\right)^2 f^2}{n^2-1}=0.$$

Мы получили квадратное уравнение. Решением этого квадратного уравнения является выражение:

$$z=\frac{f}{n+1}\pm\sqrt{\left(\frac{f}{n+1}\right)^2-\frac{n^2r^2-\left(n-1\right)^2 f^2}{n^2-1}},$$

т. к. $z=f-x$, $x=f-z$, следовательно:

$$x=f-\frac{f}{n+1}\mp\sqrt{\left(\frac{f}{n+1}\right)^2-\frac{n^2r^2-\left(n-1\right)^2 f^2}{n^2-1}},$$

$$x = \frac{f \cdot n}{n+1}\left(1 \mp \frac{n+1}{f \cdot n}\sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{r^2}{f^2} + \frac{n^2-1}{n^2}}\right)$$

$$= \frac{f \cdot n}{n+1}\left(1 \mp \sqrt{1 - \left(\frac{n+1}{n-1}\right)\left(\frac{r}{f}\right)^2}\right),$$

и окончательно запишем:

$$x = \frac{f \cdot n}{n+1}\left(1 \mp \sqrt{1 - \left(\frac{n+1}{n-1}\right)\left(\frac{r}{f}\right)^2}\right).$$

Чтобы получить $r_{\max}$ надо учесть, что под корнем должно быть выражение больше нуля, т.к. иначе получим комплексное x.

Тогда

$$1 - \left(\frac{n+1}{n-1}\right)\left(\frac{r}{f}\right)^2 > 0,$$

отсюда

$$r_{\max} = f\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

73. Определить фокусное расстояние вогнутого зеркала, если при расстоянии между предметом и изображением $l = 15 см$ поперечное увеличение $k = -2$.

Решение:

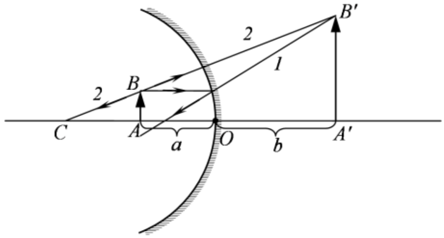

Рис. 84

AB – предмет; $A'B'$ – мнимое изображение (рис. 84).

Формула сферического зеркала:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F},$$

где $a>0$, $b>0$,

тогда $k=\frac{b}{a}$ и $b=k\cdot a$,

то $a+b=l$ или $a+k\cdot a=l$,

$$a=\frac{l}{k+1},\ b=\frac{k\cdot l}{k+1}.$$

С учетом этого перепишем формулу зеркала:

$$\frac{1}{F}=\frac{k+1}{l}-\frac{k+1}{k\cdot l};$$

$$\frac{1}{F}=\frac{k^2+k-k-1}{k\cdot l};$$

$$F=\frac{k\cdot l}{k^2-1};$$

$$F=\frac{2\cdot 15}{4-1}=10\,см.$$

74. На краю бассейна (рис. 85) стоит человек и наблюдает камень, лежащий на дне. Глубина бассейна h. На каком расстоянии от поверхности воды видно изображение камня, если луч зрения составляет с нормалью к поверхности воды угол Θ?

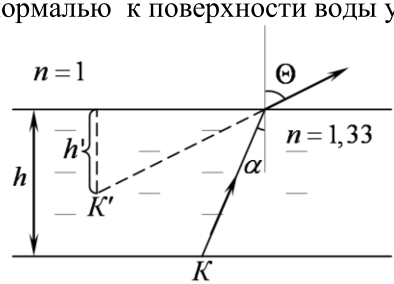

Рис. 85

Решение:

Для решения задачи нам нужен рис. 86:

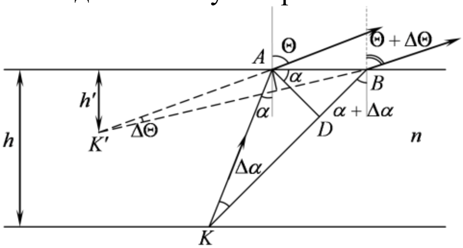

Рис. 86

Два луча, идущие от камня в глаз человека, сходятся для человека в точке K'.

Из рисунка следует:

$$\left.\begin{array}{l} AD = AB\cos\alpha \\ KA = \dfrac{h}{\cos\alpha} \\ AD = KA\cdot\Delta\alpha \end{array}\right\} AB = \frac{h}{\cos^2\alpha}\cdot\Delta\alpha,$$

где $\Delta\alpha << 1$.

$$\left.\begin{array}{l} AE = AB\cos\Theta \\ AK = \dfrac{h'}{\cos\Theta} \\ AE = AC\cdot\Delta\Theta \end{array}\right\} AB = \frac{h'}{\cos^2\Theta}\cdot\Delta\Theta,$$

где $\Delta\Theta << 1$.

По закону преломления света:

$$\sin\Theta = n\cdot\sin\alpha .$$

Последнее выражение продифференцируем:

$$(\cos\Theta)d\Theta = n(\cos\alpha)d\alpha ,$$

т. к. $\Delta\Theta$ и $\Delta\alpha$ малы, можно заменить $d\alpha$ на $\Delta\alpha$ и $d\Theta$ на $\Delta\Theta$:

$$(\cos\Theta)\Delta\Theta = (n\cdot\cos\alpha)\Delta\alpha ,$$

Из $AB=\frac{h}{\cos^2\alpha}\cdot\Delta\alpha$, $AB=\frac{h'}{\cos^2\Theta}\cdot\Delta\Theta$ и $(\cos\Theta)\Delta\Theta=(n\cdot\cos\alpha)\Delta\alpha$ получим:

$$(\cos\Theta)\frac{AB\cos^2\Theta}{h'}=(n\cdot\cos\alpha)\frac{AB\cos^2\alpha}{h},$$

$$h'=h\left(\frac{1}{n}\right)\frac{\cos^3\Theta}{\cos^3\alpha}.$$

Из $\sin\Theta=n\cdot\sin\alpha$ запишем

$$\sin\alpha=\frac{1}{n}\sin\Theta,$$

или

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{\sin^2\Theta}{n^2}},$$

т. е. $\cos\alpha=\frac{1}{n}\sqrt{n^2-\sin^2\Theta}$.

Подставим $\cos\alpha=\frac{1}{n}\sqrt{n^2-\sin^2\Theta}$ в $h'=h\left(\frac{1}{n}\right)\frac{\cos^3\Theta}{\cos^3\alpha}$:

$$h'=\left(h\cdot\frac{1}{n}\cos^3\Theta\right)\cdot\frac{n^3}{\left(n^2-\sin^2\Theta\right)^{3/2}}=h\cdot n^2\frac{\cos^3\Theta}{\left(n^2-\sin^2\Theta\right)^{3/2}}.$$

При $\Theta=0$, т.е. при условии, что человек смотрит по нормали к поверхности воды, получим

$$h'=\frac{1}{n}h.$$

75. Плоско-выпуклая линза с радиусом кривизны 30 *см* и показателем преломления 1,5 дает изображение предмета с увеличением, равным 2. Найти расстояние предмета и изображения от линзы.

Решение:

Построим чертеж (рис. 87):

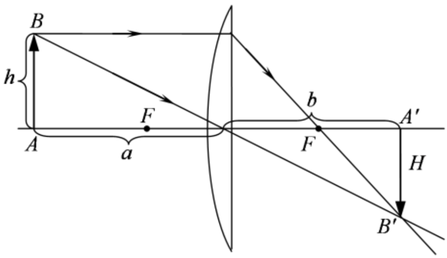

Рис. 87

Запишем формулу тонкой линзы:

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{F},$$

где a – расстояние от предмета до линзы, b – расстояние от изображения до линзы, R_1 и R_2 – радиус кривизны линзы, F – фокусное расстояние линзы.

По формуле увеличения и по подобию треугольников запишем:

$$k=\frac{H}{h}=\frac{a}{b},$$

т. е. $b=k\cdot a$.

Подставим $b=k\cdot a$ в $-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$ и учтем, что расстояния по направлению луча берутся со знаком плюс, а против направления луча со знаком минус.

Следовательно:

$$-\left(-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{ka}=(n-1)\left(-\frac{1}{R_2}\right),$$

$$\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{k}\right)=(n-1)\left(-\frac{1}{R_2}\right),$$

$$|a|=\frac{(k+1)R_2}{k(n-1)},$$

$$a = \frac{(2+1)\cdot 30}{2\cdot(1{,}5-1)} = 90\,см,$$

$$b = 2\cdot 90 = 180\,см.$$

76. Радиус кривизны вогнутого сферического зеркала 20 *см*. На расстоянии 30 *см* от зеркала поставлен предмет высотою 1 *м*. Найти положение и высоту изображения.

Решение:

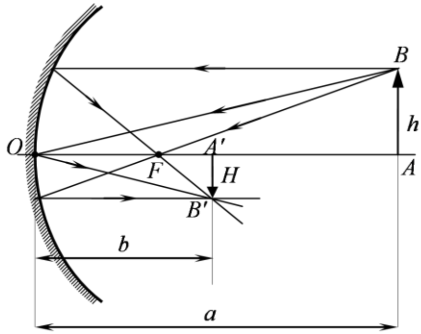

Рис. 88

Из рис. 88 видно, что изображение действительное и перевернутое.

Применим формулу сферического зеркала

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где $F = \frac{R}{2}$, тогда с учетом, что расстояния, отсчитываемые по лучу пишутся со знаком плюс, а расстояния, отсчитываемые против луча – со знаком минус, напишем:

$$-\frac{1}{F} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

или

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{F} \Rightarrow b = \frac{a\cdot F}{F-a},$$

$$b = \frac{30 \cdot 10}{20} = 15\,см,$$

Из подобия треугольников OAB и $OA'B'$ следует:

$$\frac{A'B'}{b} = \frac{AB}{a},$$

тогда,

$$A'B' = AB\frac{b}{a},$$

$$A'B' = 1 \cdot \frac{15}{30} = 0,5\,см.$$

$A'B' < AB$, т.е. изображение уменьшенное.

77. На каком расстоянии получится изображение предмета в выпуклом сферическом зеркале радиусом кривизны 40 *см*, если предмет помещен на расстоянии 30 *см* от зеркала? Какой величины получится изображение если предмет имеет величину 2 *см*?

Решение:

В данном случае (рис. 89):

$$OA = a > 0;$$
$$OF = F < 0;$$
$$OA' = b < 0.$$

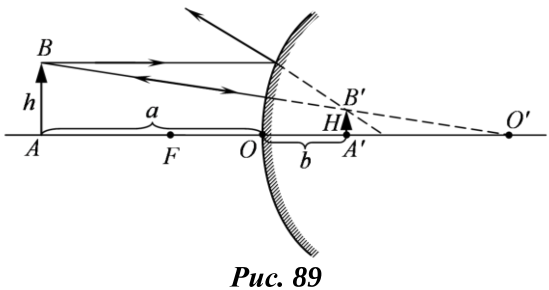

Рис. 89

Запишем формулу сферического зеркала:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F},$$

где $F = \dfrac{R}{2}$.

С учетом знаков и $F = \frac{R}{2}$ запишем:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{2}{R} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{2}{R},$$

откуда:

$$b = \frac{R \cdot a}{2a + R},$$

$$b = \frac{40 \cdot 30}{60 + 40} = \frac{1200}{100} = 12\,см.$$

С учетом знака $b = -12\,см$.

Из подобия треугольников $AO'B$ и $A'OB'$ запишем:

$$\frac{H}{h} = \frac{R - b}{R + a},$$

или

$$H = h\frac{R - b}{R + a},$$

$$H = 2\frac{40 - 12}{40 + 30} = \frac{2 \cdot 28}{70} = 0,8\,см.$$

78. На плоскопараллельную стеклянную пластину толщиной 1 *см* падает луч света под углом 60º. Показатель преломления текла 1,73. Часть света отражается, а часть, преломляясь, проходит в стекло, отражаясь от нижней поверхности пластинки и, преломляясь вторично, выходит обратно в воздух параллельно первому отраженному лучу. Определить расстояние *l* между лучами.

Решение:

По закону преломления света:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n_2,$$

тогда

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{n_2}.$$

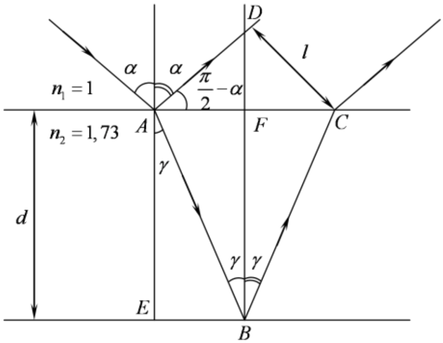

Рис. 90

Подставим числовые данные:

$$\sin\gamma = \frac{0,85}{1,73} = 0,5,$$

т. е. $\gamma = 30^\circ$.

Из треугольника ABF (рис. 90) получим:

$$AF = BF\cdot tg\gamma,$$

но $l = AC\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$,

но $AC = 2AF$, тогда:

$$l = 2BF\cdot tg\gamma\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$

$$l = 2d\cdot tg30^\circ\cdot\sin\left(90^\circ-60^\circ\right) = 2\cdot 0,01\cdot 0,58\cdot 0,5 =$$

$$= 5,8\cdot 10^{-3}\ м = 5,8\,см.$$

79. На дно сосуда, наполненного водой до высоты 10 *см*, помещен точечный источник света. На поверхности воды плавает круглая непрозрачная пластина таким образом, что ее центр находится над источником света. Какой наименьший радиус должна иметь эта пластина, чтобы ни один луч не мог выйти через поверхность воды?

Решение:

Луч не сможет выйти из воды в воздух, так как на границе вода-воздух испытывает полное внутреннее отражение (рис.91).

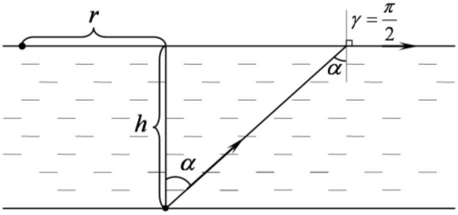

Рис. 91

По закону преломления света:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{1}{n},$$

$\sin\gamma = 1$, тогда

$$\sin\alpha = \frac{1}{n},$$

$$\sin\alpha = \frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}},$$

тогда:

$$\frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{1}{n},$$

или

$$n^2 r^2 = h^2 + r^2,$$

$$r^2\left(n^2 - 1\right) = h^2,$$

$$r = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}},$$

$$r = \frac{0,1}{\sqrt{1,33^2 - 1}} = 0,114\,м.$$

80. Монохроматический луч падает нормально на боковую поверхность призмы и выходит из нее отклоненным на 25º. Показатель преломления призмы для этого луча 1,7. Найти преломляющий угол призмы.

Решение:

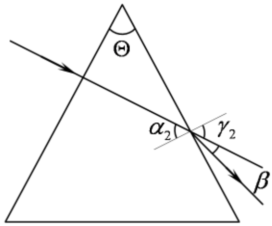

Рис. 92

Из рис.92 видно, что

$$\Theta = \alpha_2;$$

$$\gamma_2 = \Theta + \beta.$$

Запишем закон преломления света:

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\gamma_2} = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\sin\Theta}{\sin(\Theta+\beta)} = \frac{1}{n}.$$

Из последнего равенства получим:

$$n \cdot \sin\Theta = \sin\Theta \cdot \cos\beta + \cos\Theta \cdot \sin\beta.$$

Полученное выражение поделим на $\sin\Theta$:

$$ctg\Theta \cdot \sin\beta + \cos\beta = n,$$

отсюда выразим $ctg\Theta$:

$$ctg\Theta = \frac{n - \cos\beta}{\sin\beta};$$

$$\Theta = arcctg\frac{n - \cos\beta}{\sin\beta};$$

$$\Theta = arcctg\frac{1,7 - \cos 25^\circ}{\sin 25^\circ} = arcctg\frac{1,7 - 0,9}{0,42} = 62^\circ.$$

81. Преломляющий угол равнобедренной призмы равен 10º. Монохроматический луч падает на боковую грань под углом 10º.

Найти угол отклонения луча от первоначального направления, если показатель преломления материала призмы 1,6.

Решение:

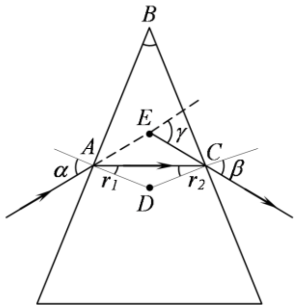

Рис. 93

В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 93) сумма углов равна 2π, т. е.

$$\frac{\pi}{2}+\varphi+\frac{\pi}{2}+\angle ADC=2\pi,$$

откуда

$$\angle ADC=\pi-\varphi,$$

т. к.

$$DA\perp AB \text{ и } DC\perp CB.$$

В треугольнике ACD сумма углов равна π, т.е.:

$$r_1+r_2+\angle ADC=\pi \text{ или } r_1+r_2+\pi-\varphi=\pi,$$

т. е. $r_1+r_2=\varphi$.

В четырехугольнике $AECD$:

$$\alpha+(\pi-\gamma)+\beta+\angle ADC=2\pi,$$

откуда

$$\gamma=\alpha+\beta-\varphi.$$

Из закона преломления имеем:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin r_1}=n;\ \frac{\sin\beta}{\sin r_2}=n,$$

Из $\dfrac{\sin\alpha}{\sin r_1}=n$:

$$\sin r_1 = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{\sin 10^\circ}{1,6} = \frac{0,1736}{1,6} = 0,106,$$

откуда $r_1 = 6^\circ 6'$.

Из $r_1 + r_2 = \varphi$:

$$r_2 = \varphi - r_1 = 10^\circ - 6^\circ 6' = 3^\circ 54'.$$

Из $\dfrac{\sin\beta}{\sin r_2} = n$:

$$\sin\beta = n \cdot \sin r_2 = 1,6 \cdot 0,068 = 0,1088,$$

$$\beta = 6^\circ 12'.$$

Из $\gamma = \alpha + \beta - \varphi$:

$$\gamma = 10^\circ + 6^\circ 12' - 10^\circ = \beta = 6^\circ 12'.$$

82. Показатель преломления материала призмы для некоторого монохроматического луча равен 1,6. Каков должен быть наибольший угол падения этого луча на призму, чтобы при выходе луча из нее не наступило полное внутреннее отражение? Преломляющий угол призмы 45º.

Решение:

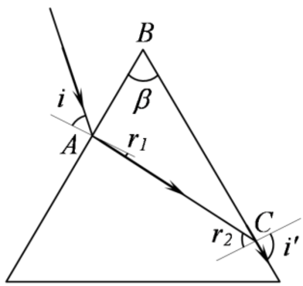

Рис. 94

Проанализируем ход луча через призму (рис. 94). При

$$i' = \frac{\pi}{2}$$

угол r_2 равен предельному углу полного внутреннего отражения:

$$n \cdot \sin r_2 = \sin i' = 1,$$

откуда

$$\sin r_2 = \frac{1}{n}.$$

В точке A:

$$\sin i = n \cdot \sin r_1.$$

В треугольнике ABC:

$$\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = \pi,$$

где $\angle ABC = \beta$;

$$\left.\begin{aligned} \angle BAC &= \frac{\pi}{2} + r_1 \\ \angle BCA &= \frac{\pi}{2} - r_2 \end{aligned}\right\}$$

После подстановки $\left.\begin{aligned} \angle BAC &= \frac{\pi}{2} + r_1 \\ \angle BCA &= \frac{\pi}{2} - r_2 \end{aligned}\right\}$ в $\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = \pi$ получим:

$$\beta = r_2 - r_1$$

Подставим $\sin r_2 = \dfrac{1}{n}$ и $\beta = r_2 - r_1$ в $\sin i = n \cdot \sin r_1$:

$$\sin i = n \cdot \sin\left(\beta - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right),$$

Тогда

$$i = \arcsin\left(n \cdot \sin\left(\beta - \arcsin\frac{1}{4}\right)\right) = 10{,}14^\circ = 10^\circ 8'.$$

83. Пучок света скользит вдоль боковой грани равнобедренной призмы. При каком предельном преломляющем угле призмы преломленные лучи претерпят полное внутреннее отражение на второй боковой грани? Показатель преломления материала призмы для этих лучей равен 1,6.

Решение:

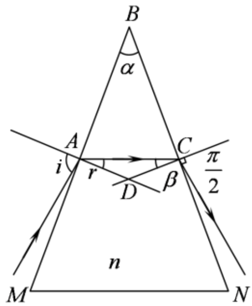

Рис. 95

Чтобы не было полного внутреннего отражения на грани BN (рис. 95), необходимо, чтобы

$$\sin\beta \le \frac{1}{n}.$$

В треугольнике ABC сумма углов равна π:

$$\alpha + \frac{\pi}{2} - r + \frac{\pi}{2} - \beta = \pi,$$

тогда $\alpha = r + \beta$.

Откуда следует, что чем больше r, тем больше допустимое α. Максимальное r определяется условием:

$$\sin r_{\max} = \frac{1}{n}$$

т. к. $i = \dfrac{\pi}{2}$.

Итак

$$\alpha_{\max} = 2r_{\max} \Rightarrow \frac{\alpha_{\max}}{2} = r_{\max},$$

$$\sin\frac{\alpha_{\max}}{2} = \sin r_{\max} = \frac{1}{n},$$

откуда

$$\alpha_{\max} = 2\arcsin\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\alpha_{\max} = 2\arcsin\left(\frac{1}{1{,}6}\right) = 77{,}36° = 77°22'.$$

84. Монохроматический луч входит через грань прямоугольной равнобедренной призмы. Войдя в призму, луч претерпевает полное внутреннее отражение от грани, соответствующей гипотенузе, и выходит через грань, соответствующую другому катету. Каким должен быть наименьший угол падения луча на призму, чтобы еще происходило полное внутреннее отражение, если показатель преломления материала призмы для этого луча 1,5?

Решение:

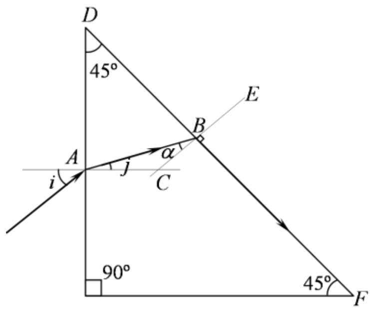

Рис. 96

На рис. 96:

$$\angle EBC = \frac{\pi}{2},$$
$$\angle ABC = \alpha,$$
$$\angle BAC = j.$$

Для треугольника ABC:

$$\alpha + j + \angle ACB = \pi,$$

но из четырехугольника $ADBC$ следует:

$$\angle ACB + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 45° = 2\pi ,$$

тогда

$$\angle ACB = \pi - 45° ,$$

тогда

$$\alpha + j = 45° \text{ или } j = 45° - \alpha \ (1).$$

В точке B:

$$\frac{\sin 90°}{\sin \alpha} = n ;$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{n} ;$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{1,5}\right) = 41°48'37''.$$

Из (1) $j = 45° - \alpha = 3°11'23''$.

$\sin j = 0,05564$.

По закону преломления света в точке A:

$$\frac{\sin i}{\sin j} = n ,$$

откуда

$$i = \arcsin(n \cdot \sin j),$$

$$i = \arcsin(1,5 \cdot 0,05564) = 4°47'15''.$$

85. Линза с фокусным расстоянием 16 *см* дает резкое изображение предмета при двух положениях, расстояние между которыми 60 *см*. Найти расстояние от предмета до экрана.

Решение:

Запишем формулу тонкой линзы для первого положения I и для второго положения II:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{F} \text{ и } \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{F} .$$

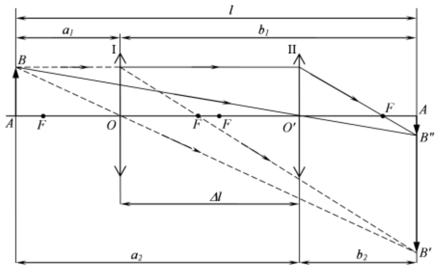

Рис. 97

Из соображений симметрии формул линзы можно записать:

$$a_1 = b_2\,;\ a_2 = b_1\,.$$

Кроме того $a_1 + b_1 = l$, но по рис.97:

$$b_1 = b_2 + \Delta l\,,$$

тогда

$$a_1 + b_2 + \Delta l = l\,,$$

а $b_2 = a_1$, тогда последнее равенство перепишется в виде: $2a_1 + \Delta l = l$, откуда

$$a_1 = \frac{l - \Delta l}{2}\,.$$

Подставим $a_1 = \dfrac{l - \Delta l}{2}$ в $a_1 + b_1 = l$:

$$b_1 = l - a_1 = \frac{l + \Delta l}{2}\,.$$

Подставим $a_1 = \dfrac{l - \Delta l}{2}$ и $b_1 = l - a_1 = \dfrac{l + \Delta l}{2}$ в формулу линзы:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{F} \Rightarrow F = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_1 + b_1} = \frac{l^2 - \left(\Delta l\right)^2}{4l}\,.$$

Из последнего выражения получаем квадратное уравнение:

$$l^2 - 4Fl - \left(\Delta l\right)^2 = 0$$

или

$$l^2 - 64l - 3600 = 0\,.$$

Решим это квадратное уравнение:

$$l = \frac{64 \pm \sqrt{4096 + 14400}}{2} = \frac{64 \pm \sqrt{18496}}{2} = \frac{64 \pm 136}{2} =$$

$$= \frac{64 + 136}{2} = 100\,см = 1\,м.$$

Знак «–» отбросили, так как расстояние должно быть положительным.

86. Чему должны быть равны радиусы кривизны поверхностей, ограничивающих лупу $|R_1| = |R_2| = R$, чтобы она давала увеличение для нормального глаза $k = 10$? Показатель преломления стекла, из которого сделана лупа, равен 1,5.

Решение:

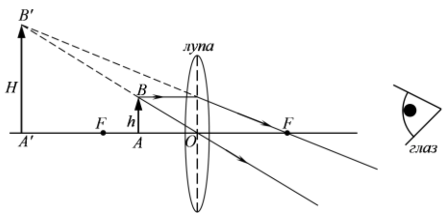

Рис. 98

На рис. 98:

$$OA = a > 0,$$
$$OF = F > 0,$$
$$OA' = b < 0\,.$$

Запишем формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F},$$

и формулу увеличения:

$$k = \frac{H}{h} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{k} \Rightarrow \frac{k}{|b|} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Rightarrow \frac{k}{|b|} - \frac{1}{|b|} = \frac{1}{F};$$

откуда

$$\frac{k-1}{|b|}=\frac{1}{F}.$$

Запишем формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{F}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

С учетом $\frac{k-1}{|b|}=\frac{1}{F}$ перепишем $\frac{1}{F}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ в виде:

$$\frac{k-1}{|b|}=(n-1)\frac{2}{R},$$

так как $|R_1|=|R_2|$.

Откуда

$$R=\frac{2(n-1)\cdot|b|}{k-1};$$

$$R=\frac{2(1,5-1)\cdot 25}{10-1}=\frac{25}{9}\approx\frac{25}{10}=2,5\,см=25\,мм.$$

87. Двояковыпуклая линза, ограниченная сферическими поверхностями одинакового кривизны $|R_1|=|R_2|=R=12\,см$, поставлена на такое расстояние от предмета, что изображение на экране получилось в 20 раз больше предмета. Определить расстояние от предмета до экрана, если показатель преломления материала линзы 1,5.

Решение:

Сделаем рисунок (рис. 99):

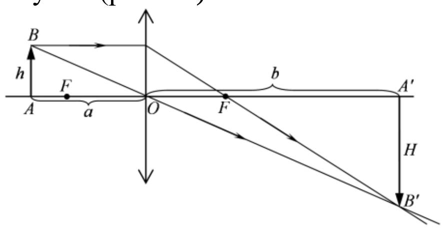

Рис. 99

Согласно формуле тонкой линзы:

$$D=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\left(n-1\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

Увеличение линзы равно:

$$k=\frac{H}{h}=\frac{b}{a},$$

кроме того, учитывая, что $R_1=R_2=R$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\left(n-1\right)\frac{2}{R},$$

но $b=k\cdot a$, тогда

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{k\cdot a}=\left(n-1\right)\frac{2}{R},$$

или

$$\frac{k+1}{k\cdot a}=\left(n-1\right)\frac{2}{R},$$

$$\frac{k\cdot a}{k+1}=\frac{R}{2\left(n-1\right)}\Rightarrow a=\frac{R\left(k+1\right)}{2k\left(n-1\right)},$$

тогда

$$b=\frac{R\left(k+1\right)}{2\left(n-1\right)}.$$

Теперь запишем

$$d=\frac{R\left(k+1\right)}{2\left(n-1\right)}\left(\frac{1}{k}+1\right)=\frac{R\left(k+1\right)^2}{2k\left(n-1\right)}.$$

Числовой результат:

$$d=\frac{12\left(20+1\right)^2}{2\cdot 20\left(1,5-1\right)}=264,6\,\textit{см}\approx 2\,\textit{м}\,65\,\textit{см}.$$

88. Выпуклое сферическое зеркало имеет радиус кривизны 60 *см*. На расстоянии 10 *см* от зеркала поставлен предмет высотой 2 *см*. Найти положение и высоту изображения.

Решение:

Сделаем рисунок (рис.100):

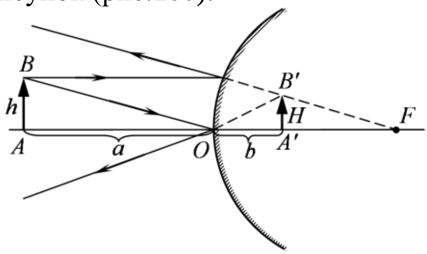

Рис. 100

Согласно формуле сферического зеркала:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}$$

запишем:

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{F}-\frac{1}{a},$$

но $F=\frac{R}{2}$, тогда

$$\frac{1}{b}=\frac{2}{R}-\frac{1}{a},$$

тогда

$$b=\frac{R\cdot a}{2a-R}.$$

Так как $F<0$, то и $R<0$:

$$b=\frac{(-60)\cdot 10}{20+60}=-\frac{60}{8}=-7,5\,см.$$

Знак «–» показывает, что изображение мнимое.

Из подобия треугольников OAB и $OA'B'$, запишем

$$\frac{H}{h}=\frac{b}{a},$$

$$H=2\frac{7,5}{10}=1,5\,см.$$

89. Найти изображение точки, которая находится на расстоянии 10 *см* слева от крайней левой линзы системы ($F_1 = -5$ *см*, $F_2 = 5$ *см*, $F_3 = -5$ *см*, $F_4 = 5$ *см*, $l_1 = 6\frac{2}{3}$ *см*, $l_2 = 5$ *см*, $l_3 = 10$ *см*), изображенной на рисунке 101:

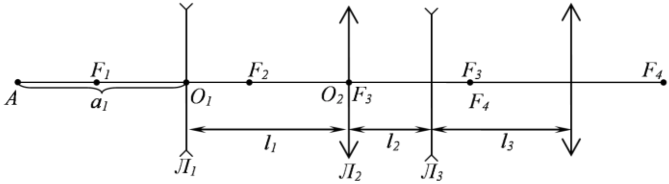

Рис. 101

Решение:

Для определения b_4 будем последовательно строить изображение точки *A* полученное в каждой линзе поочередно. Для линзы *Л₁* запишем формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} \Rightarrow -\frac{1}{5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{b_1},$$

отсюда

$$\frac{1}{b_1} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{b_1} = -\frac{3}{10} \Rightarrow b_1 = -3\frac{1}{3}\,см.$$

Тогда

$$a_2 = b_1 + l_1 = 3\frac{1}{3} + 6\frac{2}{3} = 10\,см.$$

Запишем формулу тонкой линзы для $Л_2$:

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{b_2} \Rightarrow \frac{1}{b_2} = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10},$$

т.е. $b_2 = 10\,см$.

Снова применим формулу тонкой линзы для $Л_3$:

$$-\frac{1}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{b_3},$$

откуда, $b_3 = \infty$, т.е. три линзы *Л₁*, *Л₂* и *Л₃* дают параллельный пучок лучей, но тогда *Л₄* соберет их в своем фокусе, т.е. на расстоянии $b_4 = 5 см$ справа от нее.

90. На систему линз ($F_1 = 10$ *см*, $F_2 = -20$ *см*, $F_3 = 9$ *см*, $l_1 = 15$ *см*, $l_2 = 5$ *см*), изображенных на рис.102, падает слева параллельный пучок света. Найти точку схождения этого пучка после прохождения системы.

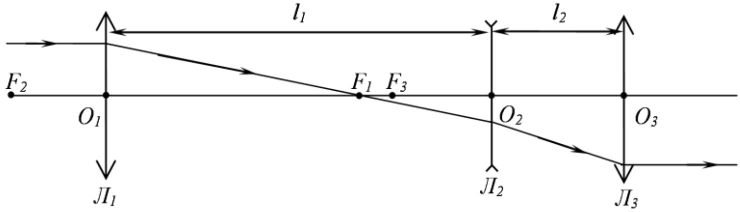

Рис. 102

Решение:

Первая линза *Л₁* оберет параллельный пучок лучей в фокусе F_1 (рис.77). Тогда, $b_1 = 10$ см; $a_2 = l_1 - F_1$.

Для второй линзы *Л₂* запишем формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2};$$

$$-\frac{1}{20} = \frac{1}{5} + \frac{1}{b_2},$$

откуда

$$\frac{1}{b_2} = -\frac{1}{20} - \frac{1}{5} = -\frac{4}{20} \Rightarrow b_2 = -4 см.$$

В этом случае $a_3 = 4 + 5 = 9 см$, но $F_3 = 9 см$, т.е. после прохождения третей линзы свет опять поддет параллельным пучком, в этом случае говорят, что данная система линз телескопическая.

$$b_3 = \infty.$$

91. В фокальной плоскости двояковыпуклой линзы расположено плоской зеркало. Предмет находится перед линзой между фокусом и двойным фокусным расстоянием. Построить изображение предмета.

Решение:

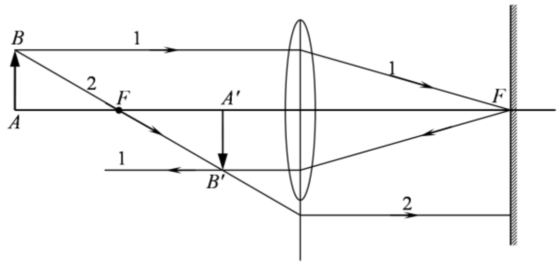

Рис. 103

На рис.103 видим: предмет AB и ход двух лучей 1 и 2 до их пересечения в точке B'.

Литература

1. Антошина, Л. Г. Общая физика: Сборник задач: Учеб. пособие / Л. Г. Антошина, С. В. Павлов, Л. А. Скипетрова; Под ред. Б. А. Струкова.– М.: ИНФРА-М, 2008. – 336 с.
2. Буховцев, Б. Б. Сборник задач по элементарной физике: Пособие для самообразования / Б. Б. Буховцев, В. Д. Кривченков, Г. Я. Мякишев. – 7-е изд., испр. – М.: УНЦ ДО, 2004. – 448 с.
3. Гинзбург, В. Л. Сборник задач по общему курсу физики: В 5 кн. Кн. IV. Оптика / В. Л. Гинзбург, Л. М. Левин, М. С. Рабинович, Д. В. Сивухин и др.; Под ред. Д. В. Сивухина. – 5-е изд., стер. – М.: Физматлит; Лань, 2006. – 272 с.
4. Егорова, Л. Н. Оптика: Учеб. пособие / Л. Н. Егорова.– Саратов: Лицей, 2003. – 128 с.
5. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – 3-е изд.– М.: Бином, Владис, 2002. – 448 с.
6. Ландсберг, Г. С. Оптика / Г. С. Ландсберг. – 6-е изд. – М.: Физматлит, 2003. – 848 с.
7. Огурцов, А. Н. Лекции по физике: Оптика /А. Н. Огурцов. – http: //kart.edu.ua/books/ln/index.html
8. Парфентьева, Н. А. Решение задач по физике. В помощь поступающим в вузы: В 2 ч. / Н. А. Парфентьева, М. В. Фомина. – М.: Мир, 1993. – Ч. 2.– 206 с.
9. Родионов, С. А. Основы оптики: Конспект лекций / С. А. Родионов. – СПб.: СПб ГИТМО (ТУ), 2000. – 167 с.
10. Сивухин, Д. В. Общий курс физики: В 5 т. Т. IV. Оптика / Д. В. Сивухин.– 3-е изд., стер.– М.: Физматлит, МФТИ, 2006. – 792 с.

Учебное издание

ФИЗИКА

ОПТИКА

Учебное пособие

В двух частях
Часть 1
ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА
Издание второе, переработанное и дополненное

Авторы-составители
ПАРАМОНОВ Андрей Викторович,
НИКОЛЬСКАЯ Людмила Владимировна,
КЛЕПИНИНА Ирина Анатольевна,
ЕРМОЛОВ Алексей Викторович

Печатается в авторской редакции.
Художественное оформление – Е. А. Свиридова.
Подписано в печать 28.03.2013 г. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 9,1. Тираж 50 экз. Заказ 13/027-1. «С» 1487.

Издательство Тульского государственного педагогического университета
им. Л. Н. Толстого. 300026, Тула, просп. Ленина, 125.

Отпечатано в Издательском центре ТГПУ им. Л. Н. Толстого.
300026, Тула, просп. Ленина, 125.