Приложение к лабораторному практикуму по физике

Математическая обработка результатов эксперимента (краткая версия[1])

Общие замечания

При проведении расчётов желательно использовать компьютерные технологии, а именно, табличный процессор Microsoft Excel, который хорошо приспособлен для решения подобных задач, обладает большим набором встроенных функций и возможностями построения и аппроксимации графиков.

При расчётах вручную чи́сла записывать в стандартном виде (экспоненциальный формат). Например, $0{,}00321=3{,}21\cdot10^{-3}$.

При промежуточных расчётах вручную (без учёта погрешностей) оставлять не менее 4-х значащих цифр. Например, если получилось число 0,003218652, то для последующих расчётов следует оставить $3{,}219\cdot10^{-3}$.

I. Прямые измерения

Прямыми называются измерения, при которых искомое значение физической величины находится непосредственно опытным путём (измерение линейных размеров линейкой, температуры термометром и т.д.

Прямые измерения бывают однократными и многократными.

Однократные измерения могут применяться при следующих условиях:

1. Исследуемый объект заранее достаточно изучен и на него есть математическая модель.
2. Имеется достаточно данных об измеряемых и влияющих физических величинах (известен диапазон их изменений, скорость изменения и т.д.).
3. Когда неопределённостью результата измерения можно пренебречь.
4. Результат однократного измерения тоже является случайной величиной.

В случае если разброс возможного результата неизвестен, например, при измерении диаметра стержня, изготовленного с произвольной точностью, то необходимы многократные измерения.

1. При однократном измерении среднее значение $\langle x\rangle$ измеряемой величины[2] равно измеренному значению.

При многократном измерении вычислить выборочное среднее (среднее арифметическое) из N измерений

$$\langle x\rangle=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\,, \qquad (\text{П.1.1})$$

[1] Здесь приведён только алгоритм действий без обоснования и доказательств.

[2] Треугольные скобки <x> означают среднее по ансамблю измерений, чтобы отличить от черты сверху. $\overline{x}$ – среднее по времени. В литературе используются оба обозначения.

где x_i – i-е измерение. Как правило, число измерений N не менее 10.
2. Вычислить выборочное среднеквадратичное отклонение среднего

при многократных измерениях	при однократном измерении	
$S_{\langle x\rangle} = \sqrt{\dfrac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \langle x\rangle\right)^2}.$	$S_{<x>} = \dfrac{\Delta_{\text{пр}}^{\max}}{2}$[1].	(П.1.2)

3. Вычислить абсолютную погрешность при вероятности α (значение вероятности задаёт преподаватель)

$$\Delta\langle x\rangle = \sqrt{(t_{\alpha N} S_{\langle x\rangle})^2 + \Delta_{\text{пр}}^2 + \Delta_{\text{окр}}^2 + \Delta_{\text{суб}}^2}\,, \qquad (\text{П.1.3})$$

где $t_{\alpha N}$ – коэффициент Стьюдента[2] (см. примечание 1.1), $\Delta_{\text{пр}}$ – приборная, $\Delta_{\text{окр}}$ – округления, $\Delta_{\text{суб}}$ – субъективная погрешности. Эти погрешности определяются вероятностью, максимальной приборной погрешностью $\Delta_{\text{пр}}^{\max}$ и ценой деления прибора ω. Наиболее проблематичной является субъективная погрешность, которая определяется не только реакцией человека, но и системными погрешностями самой установки.

Таблица 1

α=68%	α=95%	α=99%
$\Delta_{\text{пр}} = \dfrac{\Delta_{\text{пр}}^{\max}}{3}$	$\Delta_{\text{пр}} = \Delta_{\text{пр}}^{\max}$	$\Delta_{\text{пр}} = \Delta_{\text{пр}}^{\max}$
$\Delta_{\text{суб}} = \dfrac{\Delta_{\text{суб}}^{\max}}{3}$	$\Delta_{\text{суб}} = \Delta_{\text{суб}}^{\max}$	$\Delta_{\text{суб}} = \Delta_{\text{суб}}^{\max}$
$\Delta_{\text{окр}} = \dfrac{\alpha\omega}{2}$		

Значения $\Delta_{\text{пр}}^{\max}$, $\Delta_{\text{суб}}^{\max}$ для конкретных приборов, используемых в установке, берутся из паспортов приборов и их технических описаний.
4. Определить относительную погрешность[3]

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta\langle x\rangle}{\langle x\rangle}100\%. \qquad (\text{П.1.4})$$

5. Результат округлить по правилам (см. пункт V) и записать в виде

$$x = \left(\langle x\rangle \pm \Delta\langle x\rangle\right) \text{ ед. измерения, } \varepsilon_x\text{=число \%, } \alpha\text{=число \%.} \qquad (\text{П.1.5})$$

[1] Приведённое значение получено путем предварительных исследований. Его можно использовать только при однократных измерениях, указанных в описаниях лабораторных работ. В других случаях необходим предварительный расчёт этого значения.
[2] Уильям Сили Госсет (William Sealy Gosset) (13.06.1876 – 16.10.1937) – английский учёный-статистик, более известный под своим псевдонимом «Стьюдент» благодаря своим работам по исследованию так называемого распределения Стьюдента.
[3] Чаще всего обозначается ε, в электричестве — δ, чтобы не путать с ЭДС.

Примечание 1.1

Значения коэффициентов Стьюдента можно определить так:

- в Microsoft Excel есть функция СТЬЮДРАСПОБР(1-α; N-1);
- Из ресурсов Сети, например, URL: http://www.kontrolnaya-rabota.ru/s/teoriya-veroyatnosti/tablica-studenta/?n=10&p=0.67;
- из таблицы 3;

Таблица 2. Коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha N}$ при однократном измерении

α=68%	α=95%	α=99%
$t_{\alpha N}=1$	$t_{\alpha N}=2$	$t_{\alpha N}=2{,}6$

Таблица 3. Коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha N}$ при многократном измерении

N \ α	0,10	0,50	0,68	0,95	0,99
2	0,158	1,000	1,819	12,706	63,657
3	0,142	0,816	1,312	4,303	9,925
5	0,134	0,741	**1,134**	**2,776**	4,604
10	0,129	0,703	**1,053**	**2,262**	3,250
15	0,128	0,692	1,031	2,145	2,977
20	0,127	0,688	1,021	2,093	2,861
50	0,126	0,680	1,005	2,010	2,680
100	0,126	0,677	0,999	1,984	2,626

Пример 1.1

Проведено прямое однократное измерение высоты падения шарика h=1500 мм при помощи измерительной ленты (шкалы для определения высоты) с ценой деления 1 мм. Преподаватель задал вероятность α = 95%.

Погрешность / Прибор	ω – цена деления	$\Delta_{пр}^{max}$ – приборная	$\Delta_{суб}^{max}$ – субъективная
Шкала для определения высоты h	1 мм	1 мм	5 мм

Большая субъективная погрешность в этом случае связана с неточностью позиционирования шарика относительно шкалы.

Из таблиц 1 и 2 и формулы (П.1.2.2) следует:

S_h = 0,5 мм, $t_{\alpha N}=2$	$\Delta_{окр}$ = 0,475 мм	$\Delta_{пр}$ = 1 мм	$\Delta_{суб}$ = 5 мм

А погрешности высоты по формуле (П.1.3) и (П.1.4) равны

$$\Delta h = 5{,}218 \text{ мм}, \qquad \varepsilon_h = 0{,}3479\%.$$

Окончательно, используя правила округления (см. пункт V), записываем

$$h = (1500 \pm 5{,}2) \text{ мм}, \quad \varepsilon_h = 0{,}35\%, \qquad \alpha = 95\%.$$

Пример 1.2

Проведено прямое многократное измерение времени падения шарика с некоторой высоты при помощи электронного секундомера. Преподаватель задал вероятность α = 95%.

Погрешность / Прибор	ω – цена деления	$\Delta_{пр}^{max}$ – приборная	$\Delta_{суб}^{max}$ – субъективная
Электронный секундомер	0,01 с	$(0{,}02\cdot\langle t\rangle+0{,}01)$ с	–

Результаты измерений

i	t_i, c	$\Delta t_i^2, c^2$
1	0,56	4,00E-06
2	0,55	6,40E-05
3	0,56	4,00E-06
4	0,56	4,00E-06
5	0,57	1,44E-04
6	0,55	6,40E-05
7	0,56	4,00E-06
8	0,56	4,00E-06
9	0,55	6,40E-05
10	0,56	4,00E-06

Расчёты

По формуле (П.1.1)
$\langle t\rangle$=0,5580 с.
Из таблиц 1 и 3 и формулы (П.1.2.1) следует:
S_h=0,002000 с, $t_{\alpha N}=2{,}262$.
$\Delta_{окр}$=0,005 с.
$\Delta_{пр}$=0,01962 с.
$\Delta_{суб}$=0.
Погрешности времени по формуле (П.1.3) и (П.1.4) равны

$$\Delta t=0{,}02215 \text{ с}, \qquad \varepsilon_t=3{,}970\%.$$

Окончательно, используя правила округления (см. пункт V), записываем

$$t=(0{,}56\pm0{,}022) \text{ с}, \quad \varepsilon_t=4{,}0\%, \qquad \alpha=95\%.$$

Примечание 1.2

При таких измерениях возможен случайный отсчёт величины, резко выпадающий из общего ряда (скачок напряжения в сети, неверное срабатывание датчика и так далее). Такие значения называются «промахами» и должны быть отброшены.

II. Погрешности табличных значений

В расчётные формулы часто входят математические и физические константы и табличные величины.

Например, число π известно с очень большой точностью

π=3,14159265358979323846264338327950… и далее.

Поэтому при расчётах его необходимо брать с большой, но разумной точностью, чтобы не учитывать его погрешность.

- В табличном процессоре Microsoft Excel есть функция ПИ();
- π=3,1415927 (калькулятор 8 знаков, часто есть кнопка $\boxed{\pi}$);
- π=3,142±0,0004, ε_π=0,013% (для ручных расчётов).

Ускорение свободного падения[1]:

Таблица 4.

город	широта	значение
Москва	55,45° с. ш.	g=(9,815±0,001) м/с^2, ε_g=0,0101%
Тула	54°12′00″ с. ш.	g=(9,814±0,001) м/с^2, ε_g=0,0101%

Современные значения других физических констант с погрешностями можно найти здесь[2].

При использовании табличных данных (плотность вещества, модуль Юнга, удельное сопротивление и так далее), если в таблице не указано значение погрешности, то абсолютная погрешность этой величины равна половине последнего разряда[3].

Пример 2.1

В справочнике значение плотности керосина $\rho = 800$ кг/м^3. Единицей последнего разряда числа 800 является 1, тогда абсолютная погрешность

$$\Delta\rho = \frac{1}{2}\text{ кг/м}^3 = 0,5\text{ кг/м}^3, \qquad \varepsilon_\rho = 0,0625\%.$$

Примечание 2

В примере 2.1 относительная погрешность получилась слишком маленькой, что вряд ли соответствует реальности. В зависимости от сорта и физических условий плотность керосина составляет 650÷920 кг/м^3. Поэтому необходимо использовать максимально достоверную справочную литературу и источники.

Например:

1. Плотность воды, теплопроводность и физические свойства H_2O. [Электронный ресурс]. URL: http://thermalinfo.ru/svojstva-zhidkostej/voda-i-rastvory/teploprovodnost-i-plotnost-vody-teplofizicheskie-svojstva-vody-h2o#plotnost-vody.
2. Свойства ртути: плотность, теплопроводность, теплоемкость. [Электронный ресурс]. URL: http://thermalinfo.ru/svojstva-materialov/metally-i-splavy/plotnost-rtuti-i-ee-svojstva.

И другие.

[1] Ускорение свободного падения для разных широт на уровне моря. [Электронный ресурс].
URL: http://tehtab.ru/Guide/GuidePhysics/ConstantsAlphabetsNaming/FreeFallAcceleration/.
Ускорение свободного падения для 122 городов. [Электронный ресурс].
URL: http://alfapascal.ru/library/uskorenie_svobodnogo_padeniya_dlya_122_gorodov.

[2] CODATA (англ. Committee on Data for Science and Technology – Комитет по данным для науки и техники) – междисциплинарный комитет Международного совета по науке, учрежденный в 1966 г. и ставящий своей целью сбор, критическую оценку, хранение и поиск важных данных для задач науки и техники. [Электронный ресурс]. URL: http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html,

[3] Разряд в арифметике – место, занимаемое цифрой при письменном обозначении числа. В десятичной записи цифры 1–го разряда – единицы, 2–го – десятки и т. д.

III. Косвенные измерения

Косвенными называются измерения, при которых искомое значение физической величины находится на основании зависимости (формулы) между этой величиной и величинами, определяемыми прямым путём.

Пусть расчётная формула имеет вид $q = q(x_1, x_2, ..., x_N)$.

1. Вычислить среднее значение $\langle q \rangle$

$$\langle q \rangle = q\left(\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, ..., \langle x_N \rangle\right). \qquad (\text{П.3.1})$$

2. Произвести расчёт погрешностей прямых измерений (пп. I и II) всех величин x_i, входящих в формулу. Результаты записать в виде (П.1.5).

3. Вычислить абсолютную (или относительную[1]) погрешность $\Delta\langle q \rangle$. Для этого есть несколько способов.

3А. Общий метод

Формула для погрешности пишется, вычислив частные производные

$$\Delta\langle q \rangle = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial q}{\partial x_i\big|_{x_i=\langle x_i \rangle}}\Delta\langle x_i \rangle\right)^2}. \qquad (\text{П.3.2})$$

Пример 3.1[2]

Формула для определения ускорения свободного падения g при падении шарика с высоты h без начальной скорости за время t имеет вид

$$g = \frac{2h}{t^2}.$$

Формула для абсолютной погрешности, исходя из (П.3.2), имеет вид

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{2h}{t^2}\right)\Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2h}{t^2}\right)\Delta t\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2}\Delta h\right)^2 + \left(-2\frac{2h}{t^3}\Delta t\right)^2}.$$

В принципе, формула готова к вычислениям, однако очень громоздка. Преобразуем её.

$$\Delta g = \frac{2h}{t^2}\sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta t}{t}\right)^2} = g\sqrt{\varepsilon_h^2 + 4\varepsilon_t^2}.$$

Таким образом, в данном случае удобнее сначала вычислить относительную погрешность, а затем абсолютную.

$$\varepsilon_g = \sqrt{\varepsilon_h^2 + 4\varepsilon_t^2}, \qquad \Delta g = g \cdot \varepsilon_g.$$

Если использовать результаты примеров 1.1 и 1.2, то получим

g=9,635 м/с^2, ε_g=7,948%, Δg=0,7658 м/с^2.

Окончательно, используя правила округления (см. пункт V), записываем

g=(9,6±0,8) м/с^2, ε_g=8%, α =95%.

---

[1] При расчётах относительная погрешность выражается в относительных единицах, в конечной записи – в процентах.

[2] В примерах не используются обозначения средних значений для краткости записи.

Пример 3.2

Выражение для работы газа при изобарном процессе имеет вид

$$A=\nu R\left(T_2-T_1\right),$$

где ν, T_2, T_1 – результаты прямых измерений, R – табличное значение, для которых известны абсолютные погрешности $\Delta\nu$, ΔR, ΔT_2, ΔT_1.

Применяем формулу (П.3.2), получим

$$\Delta A=\sqrt{\left(\frac{\partial\left(\nu R\left(T_2-T_1\right)\right)}{\partial\nu}\Delta\nu\right)^2+\left(\frac{\partial\left(\nu R\left(T_2-T_1\right)\right)}{\partial R}\Delta R\right)^2+\left(\frac{\partial\left(\nu R\left(T_2-T_1\right)\right)}{\partial T_2}\Delta T_2\right)^2+\left(\frac{\partial\left(\nu R\left(T_2-T_1\right)\right)}{\partial T_1}\Delta T_1\right)^2}.$$

$$\Delta A=\sqrt{\left(R\left(T_2-T_1\right)\Delta\nu\right)^2+\left(\nu\left(T_2-T_1\right)\Delta R\right)^2+\left(\nu R\Delta T_2\right)^2+\left(\nu R\Delta T_1\right)^2}.$$

Формула достаточно сложная, однако поддаётся упрощению

$$\Delta A=A\sqrt{\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)^2+\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2+\left(\frac{\Delta T_2}{\left(T_2-T_1\right)}\right)^2+\left(\frac{\Delta T_1}{\left(T_2-T_1\right)}\right)^2}.$$

$$\varepsilon_A=\sqrt{\varepsilon_\nu^2+\varepsilon_R^2+\left(\frac{\Delta T_2}{T_2-T_1}\right)^2+\left(\frac{\Delta T_1}{T_2-T_1}\right)^2}=\sqrt{\varepsilon_\nu^2+\frac{(\Delta T_2)^2+(\Delta T_1)^2}{(T_2-T_1)^2}}.$$

В последней формуле также учтено, что величину R можно взять с высокой степенью точности и не учитывать её погрешность.

Пример 3.3

Сопротивление проводника можно вычислить, измерив напряжение на нём U и силу тока в цепи I

$$R=\frac{U}{I}.$$

Применив формулу (П.3.2), получим

$$\Delta R=\sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{U}{I}\right)\Delta U\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial I}\left(\frac{U}{I}\right)\Delta I\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{I}\Delta U\right)^2+\left(-\frac{U}{I^2}\Delta I\right)^2}.$$

Формула очень неудобна для расчёта, поэтому преобразуем её. Вынесем общий множитель U/I

$$\Delta R=\frac{U}{I}\sqrt{\frac{I^2}{U^2}\left(\frac{1}{I}\Delta U\right)^2+\frac{I^2}{U^2}\left(\frac{U}{I^2}\Delta I\right)^2}=\frac{U}{I}\sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2+\left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2}=R\sqrt{\left(\varepsilon_U\right)^2+\left(\varepsilon_I\right)^2}.$$

3Б. Частный метод

Если величина q может быть представлена в виде $q=x_1^\alpha\cdot x_2^\beta\cdot\ldots\cdot x_N^\gamma$, где α, β, γ – точные числа, то абсолютную погрешность можно определить более просто по формуле

$$\Delta\langle q\rangle=\langle q\rangle\sqrt{\left(\alpha\frac{\Delta\langle x_1\rangle}{\langle x_1\rangle}\right)^2+\left(\beta\frac{\Delta\langle x_2\rangle}{\langle x_2\rangle}\right)^2+\ldots+\left(\gamma\frac{\Delta\langle x_N\rangle}{\langle x_N\rangle}\right)^2},\quad (\text{П.3.2а})$$

или относительную погрешность

$$\frac{\Delta\langle q\rangle}{\langle q\rangle} = \varepsilon_q = \sqrt{\left(\alpha\varepsilon_{x_1}\right)^2 + \left(\beta\varepsilon_{x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\gamma\varepsilon_{x_N}\right)^2}\,, \qquad \text{(П.3.2б)}$$

Из приведённых примеров видим, что определять относительную погрешность измеряемых величин исключительно полезно.

Пример 3.4

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

где π – константа, $\sqrt{2}$ – иррациональное число, d, n – результаты прямых измерений, для которых известны абсолютные погрешности Δd, Δn.

Перепишем заданную формулу в виде $\langle l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} d^{-2} n^{-1}$, а при вычислениях π и $\sqrt{2}$ =1,41421 берём с высокой степенью точности, чтобы не учитывать их погрешности. Если пользоваться формулой (П.3.2), то

$$\Delta l = l\sqrt{\left(\frac{(-2)\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{(-1)\Delta n}{n}\right)^2} = l\sqrt{\left(\frac{2\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2} = l\sqrt{\left(2\varepsilon_d\right)^2 + \left(\varepsilon_n\right)^2}\,.$$

Такой же результат можно быстрее получить из формулы (П.3.2б).

Также посмотрите примеры 3.1 и 3.3 из п.3А.

3С. Метод «Шаг за шагом»

В некоторых случаях вычисление частных производных в формуле (П.3.2) может быть достаточно сложным, а формула (П.3.2б) неприменима, так как q есть функция, в которую входит сложная комбинация переменных. Тогда исходную формулу можно разбить на части, используя дополнительные обозначения.

Пример 3.5

Возьмём формулу из примера 3.2. Обозначим $D = T_2 - T_1$, тогда $A = \nu RD$ или $A = \nu^1 R^1 D^1$. Выражение для ΔA получаем, применяя формулу (П.3.2а)

$$\Delta A = A\sqrt{\left(\frac{1\Delta\nu}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{1\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{1\Delta D}{D}\right)^2} = A\sqrt{\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2}\,.$$

Выражение для ΔD получаем, применяя формулу (П.3.2)

$$\Delta D = \sqrt{\left(\frac{\partial(T_2 - T_1)}{\partial T_2}\Delta T_2\right)^2 + \left(\frac{\partial(T_2 - T_1)}{\partial T_1}\Delta T_1\right)^2} = \sqrt{\left(\Delta T_2\right)^2 + \left(\Delta T_1\right)^2}\,.$$

В итоге намного быстрее получаем формулу (без учёта погрешности R)

$$\varepsilon_A = \sqrt{\varepsilon_\nu^2 + \frac{(\Delta T_2)^2 + (\Delta T_1)^2}{(T_2 - T_1)^2}}\,,$$

в точности совпадающую с конечной формулой примера 3.2.

Примечание 3

Новые переменные должны быть независимы от других!

4. Определить относительную (или абсолютную) погрешность

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta\langle x\rangle}{\langle x\rangle}100\% \qquad \text{или} \qquad \Delta\langle x\rangle = \langle x\rangle \cdot \varepsilon_x. \qquad (\text{П.3.4})$$

5. Результат записать в виде (см. ниже, пункт V)

$x = \left(\langle x\rangle \pm \Delta\langle x\rangle\right)$ ед. измерения, ε_x=число %, α =число %. (П.3.5)

IV. Сравнение результатов

Если одна и та же величина измерена разными способами или её можно сравнить с табличной, то для сравнения результатов необходимо показать интервалы возможных значений измеренной величины. Если интервалы перекрываются, то говорят, что полученные результаты в пределах погрешности совпадают.

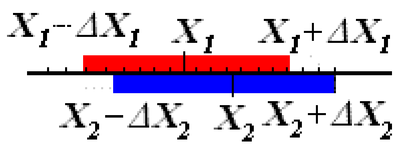

Рис. П.4.1

Пример 4.1

В результате выполнения измерений и расчётов ускорение свободного падения получилось (см. пример.3.1)

$g=(9{,}6\pm0{,}8)$ м/с^2, ε_g=8%, α =95%.

Тогда сравнение результата с табличным выглядит следующим образом

Рис. П.4.2

Можно сделать вывод о том, что в пределах погрешности результаты совпадают.

Если по каким-либо причинам определить погрешность трудно, то сравнение для произвольной величины *A* можно провести так

$$\varepsilon_A = \frac{\left|A_{теор} - A_{экспер}\right|}{A_{теор}} \cdot 100\% .$$

Погрешность менее 3% считается вполне удовлетворительной.

V. Запись результатов вычислений

Конечный результат вычислений при выполнении лабораторной работы записывается в виде (П.3.5). При этом среднее значение и погрешность записывается в стандартном виде с одинаковой степенью.

Значение абсолютной погрешности округляется до одной или двух (реже, при повышенной точности) значащих цифр[1].

Значащими называются все цифры числа, начиная с первой слева, отличной от нуля.

Пример 5.1

В погрешности Δx=0,0380 значащими будут три цифры: 3, 8 и правый 0. Тогда, округляя до одной значащей цифры, получаем Δx=0,04.

В погрешности Δx=1245 значащими будут четыре цифры. Тогда, округляя до двух значащих цифр, получаем $\Delta x=1{,}2\cdot 10^3$.

В среднем значении оставляют все верные и одну неверную цифры, округляя по правилам математики в большую или меньшую стороны.

Цифра называется **верной**, если единица разряда, которому она принадлежит, больше абсолютной погрешности.

Пример 5.2

В результате расчётов получили следующий результат:

$$l = \left(3200{,}14 \pm 223\right) \text{м}.$$

1. Запишем среднее значение и погрешность в стандартном виде (слева от запятой цифра от единицы до девяти)

$$l = \left(3{,}20014 \pm 0{,}223\right) \cdot 10^3 \text{ м}.$$

2. Округляем абсолютную погрешность до двух значащих цифр

$$l = \left(3{,}20014 \pm 0{,}22\right) \cdot 10^3 \text{ м}.$$

3. Округляем среднее значение, оставляя все верные и одну неверную цифры. Цифра 3 верная, т.к. единица её разряда больше абсолютной погрешности (1 > 0,22). Цифра 2 неверная, единица её разряда (десятые) меньше абсолютной погрешности (0,1 < 0,22). Остальные цифры тем более неверные.

$$l = \left(3{,}2 \pm 0{,}22\right) \cdot 10^3 \text{ м}.$$

[1] Здесь речь идёт об арабских цифрах и, следовательно, **цифрами называются знаки: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.**

VI. Построение и обработка графиков

Для построения следует использовать миллиметровую бумагу. Размер графика должен составлять от четверти до полного листа тетради.

Выбрать масштаб по осям таким образом, чтобы экспериментальные точки располагались на всей площади листа. На осях координат должны быть указаны величина, единица измерения и масштабная единица.

Экспериментальные точки следует наносить карандашом.

Если для координат точек известны их погрешности, то полезно их указывать отрезками вдоль соответствующих осей. В этом случае точка изображается крестом.

Если график строится для подтверждения теоретической зависимости, то следует нарисовать эту зависимость, подобрав коэффициенты таким образом, чтобы экспериментальные точки находились к ней максимально близко.

Часто зависимость можно привести к линейному виду, тогда прямая линия строится максимально удобно (по линейке).

Коэффициенты прямой можно рассчитать по методу наименьших квадратов[1] (МНК).

Пусть имеются экспериментальные точки с координатами (x_i, y_i). Теория предсказывает, что зависимость имеет вид $y=kx+b$ или $y=kx$. Тогда коэффициенты и их погрешности вычисляются следующим образом.

$y=kx+b$	$y=kx$
$k=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N}x_iy_i-\langle x\rangle\sum\limits_{i=1}^{N}y_i}{\sum\limits_{i=1}^{N}x_i^2-\langle x\rangle\sum\limits_{i=1}^{N}x_i}, \quad b=\overline{y}-k\overline{x}$	$k=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N}x_iy_i}{\sum\limits_{i=1}^{N}x_i^2}$, или $k=\dfrac{<x_iy_i>}{<x_i^2>}$
$S_k=\dfrac{1}{\sqrt{N-2}}\sqrt{\dfrac{\langle y^2\rangle-\langle y\rangle^2}{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2}-k^2}$, $S_b=S_k\sqrt{\langle x^2\rangle}$, $\Delta k=t_{\alpha,N}S_k$, $\Delta b=t_{\alpha,N}S_b$.	$S_k=\dfrac{1}{\sqrt{N-1}}\sqrt{\dfrac{<y_i^2>}{<x_i^2>}-k^2}$, $\Delta k=t_{\alpha,N}S_k$.

Лучше применить Microsoft Excel, где использовать точечный тип диаграммы, построить линию тренда, вывести уравнение на диаграмму, а коэффициенты рассчитать с помощью функции ЛИНЕЙН(параметры).

Пример 6.1

Шарик без начальной скорости бросают с некоторой высоты и засекают время падения. Теоретическая зависимость высоты от времени без учёта силы сопротивления воздуха имеет вид

[1] Метод применим не только для линейных зависимостей, но расчёт становится более сложным.

$$h = \frac{gt^2}{2}.$$

Введём новую переменную $x=t^2$ и константу $k=g/2$. Тогда уравнение принимает вид

$$h = kx.$$

Экспериментально были получены следующие данные:

h, мм	1100	1500	1700	2500
t, с	0,481	0,558	0,599	0,723
t^2, с^2	0,231	0,311	0,359	0,523

Тогда график с обработкой имеет вид

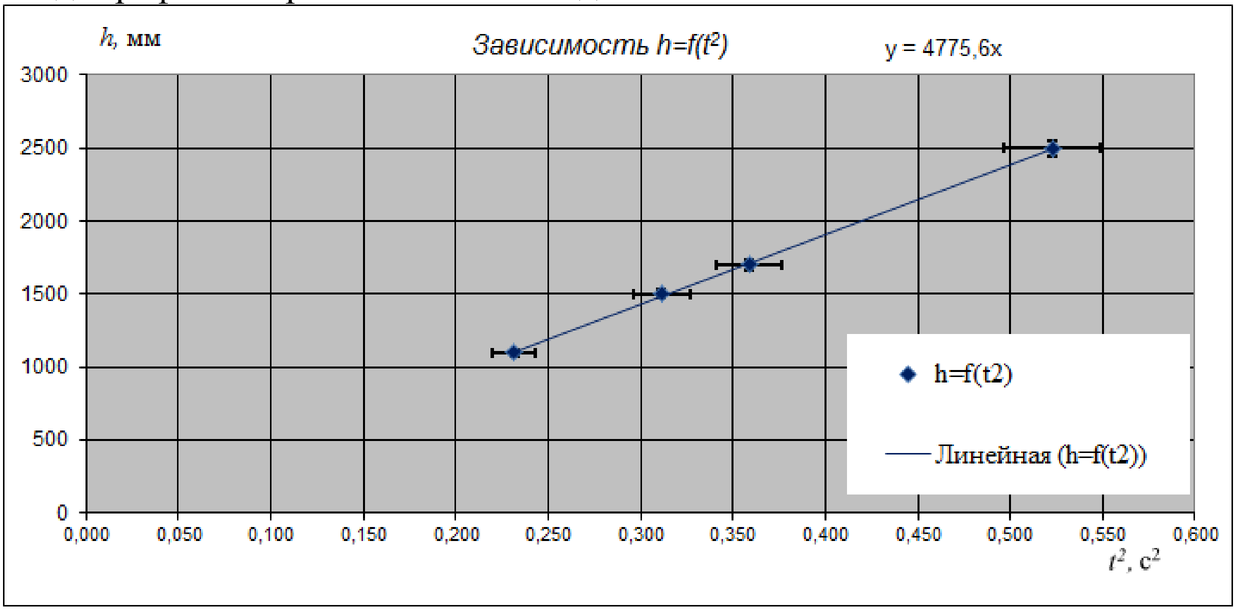

Рис. П.4.3

С помощью функции ЛИНЕЙН(параметры) определяем коэффициент k = 4775,6 мм/с^2, стандартное отклонение S_k = 15,33 мм/с^2 и его погрешность Δk = 48,79 мм/с^2. Тогда ускорение свободного падения

$$g=(9551\pm98) \text{ мм/с}^2.$$

А после правильного округления

$$g=(9{,}6\pm0{,}1) \text{ м/с}^2.$$

Плохое совпадение эксперимента с теорией, что тоже возможно, обусловлено систематическими погрешностями установки, которые здесь не учтены. Также здесь приведён упрощенный вариант, не учитывающий погрешности исходных данных[1].

[1] Бобылёв Ю. В., Грибков А. И., Романов Р. В. Оценка погрешностей метода наименьших квадратов в лабораторном практикуме по физике // Разработка учебно-методического обеспечения для внедрения инновационных методов обучения при реализации ФГОС ВО 3++: материалы XLV учебно-методической конференции проф.-препод. состава, аспирантов, магистрантов, соискателей ТГПУ им. Л. Н. Толстого / Под общ. ред. В. А. Панина. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2018, (в печати).