

## Лабораторная работа № 8

### Определение момента инерции тела методом крутильных колебаний с помощью трифилярного подвеса

**Цель работы:** научиться определять момент инерции методом крутильных колебаний с помощью трифилярного подвеса.

**Оборудование:** трифилярный подвес, набор металлических стержней (2 коротких, 1 длинный), секундомер, линейка, весы технические, набор разновесов.

### Теоретическая часть

#### Момент инерции

Моментом инерции материальной точки (рис. 8.1) относительно какой-либо оси называется скалярная величина, равная произведению массы этой точки  $m$  на квадрат её расстояния  $r$  от оси вращения

$$I = mr^2. \quad (8.1)$$

Моментом инерции системы, состоящей из  $n$  материальных точек, относительно какой-либо оси называется сумма моментов инерции всех её точек относительно этой оси

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (8.2)$$

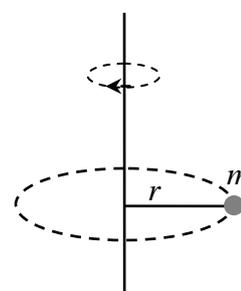


Рис. 8.1

Для тела, имеющего плотность  $\rho$ , момент инерции относительно оси  $OZ$  может быть вычислен путём интегрирования

$$I = \int_V \rho r^2 dV, \quad (8.3)$$

где  $r$  – расстояние от элемента объёма тела  $dV$  до оси  $OZ$ . Измеряется в  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ , размерность  $[I]=ML^2$ .

Момент инерции отвечает за инертные свойства тела при вращении, так же, как масса является мерой инертности при поступательном движении. Вместе с тем, между массой и моментом инерции есть существенное различие: массу тела изменить нельзя, а момент инерции меняется простым изменением формы тела.

#### Момент инерции длинного тонкого стержня

Относительно оси, проходящей через конец стержня (рис. 8.2) из (8.3) следует

$$\begin{aligned} I &= \int_V \rho r^2 dV = \iiint \rho x^2 dx dy dz = \rho \int_0^l x^2 dx \iint dy dz = \\ &= \rho \frac{l^3}{3} S = \frac{1}{3} \rho V l^2 = \frac{1}{3} m l^2. \end{aligned} \quad (8.4)$$

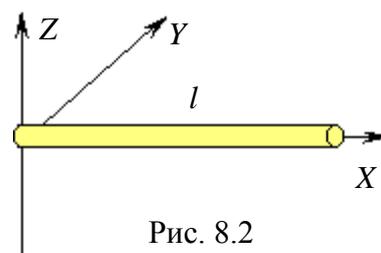


Рис. 8.2

Здесь был записан элемент объёма в декартовой (прямоугольной)

системе координат  $dV = dx dy dz$  и учтено, что  $S = \iint dy dz$  – площадь поперечного сечения стержня, а  $V = lS$  – его объём,  $l$  – длина стержня.

Таким образом, момент инерции тонкого стержня относительно его конца

$$I_C = \frac{1}{3} ml^2. \quad (8.5)$$

По теореме Штейнера (теореме о параллельных осях) момент инерции АТГ  $I$ , относительно произвольной оси равен сумме момента инерции  $I_0$ , относительно параллельной оси, проходящей через центр масс и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

$$I = I_0 + ma^2. \quad (8.6)$$

Тогда момент инерции длинного тонкого стержня относительно его середины (центра масс)

$$I_{C_0} = I_C - ma^2 = \frac{1}{3} ml^2 - m \frac{l^2}{4} = \frac{1}{12} ml^2. \quad (8.7)$$

То есть

$$I_{C_0} = \frac{1}{12} ml^2. \quad (8.8)$$

Момент инерции тела может быть определен различными методами, в частности, методом крутильных колебаний с помощью трифилярного подвеса.

### Трифиллярный подвес

Трифиллярный подвес (рис. 8.3) представляет собой круглую платформу, которая подвешена на трёх симметрично расположенных нитях, укрепленных у края платформы. Наверху эти нити также симметрично прикреплены к диску меньшего диаметра. Платформа может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси, перпендикулярной к её плоскости и проходящей через её середину. Центр тяжести платформы при этом перемещается по оси вращения. Период колебаний определяется величиной момента инерции платформы и положенного на неё груза.

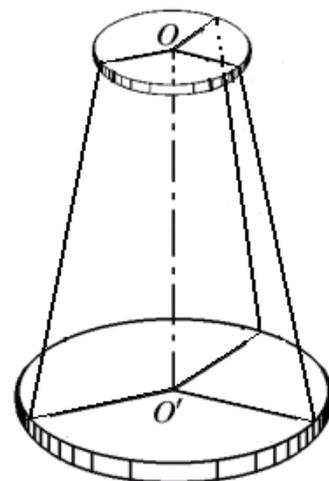


Рис. 8.3

Если платформа с грузом общей массы  $m$ , вращаясь в одном направлении, поднялась на высоту  $h$ , то её потенциальная энергия будет равна

$$W_p = mgh, \quad (8.9)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Вращаясь в другом направлении, платформа вернётся в исходное положение с кинетической энергией

$$W_k = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (8.10)$$

где  $I$  – момент инерции системы,  $\omega$  – угловая скорость, с которой движется платформа в момент достижения ею положения равновесия.

Пренебрегая работой сил трения, на основании закона сохранения механической энергии имеем

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = mgh. \quad (8.11)$$

Считая, что платформа совершает гармонические колебания, можно записать зависимость угла поворота платформы  $\alpha$  от времени  $t$  в виде

$$\alpha = \alpha_0 \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad (8.12)$$

где  $\alpha_0$  – амплитуда,  $T$  – период колебаний. Угловая скорость, являющаяся первой производной угла поворота по времени, выразится так

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi\alpha_0}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t. \quad (8.13)$$

В моменты прохождения платформы через положения равновесия  $t = 0, \frac{1}{2}T, T$  и так далее, модуль угловой скорости будет равен

$$\omega = \frac{2\pi\alpha_0}{T}. \quad (8.14)$$

Из (8.11) и (8.14) имеем

$$mgh = \frac{1}{2} I \frac{4\pi^2\alpha_0^2}{T^2}. \quad (8.15)$$

Выберем начало отсчёта в центре верхней платформы (рис. 8.4). Тогда координаты точки  $C''$  после поворота платформы  $(R \cos \alpha_0, R \sin \alpha_0, H - h)$ , координаты точки  $C'$  до поворота  $(R, 0, H)$ , координаты точки  $C$  на верхнем диске  $(r, 0, 0)$ , где  $R$  – радиус платформы,  $r$  – радиус верхнего диска,  $H$  – расстояние между платформой и диском.

Поясним ещё раз, что это точки крепления одной из нитей. Расстояние между двумя точками с координатами  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$  всегда равно  $S^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$ .

Если  $L$  – длина нити подвеса, то

$$L^2 = (R \cos \alpha_0 - r)^2 + R^2 \sin^2 \alpha_0 + (H - h)^2 = R^2 - 2Rr \cos \alpha_0 + r^2 + H^2 - 2Hh + h^2,$$

$$L^2 = (R - r)^2 + H^2 = R^2 - 2Rr + r^2 + H^2.$$

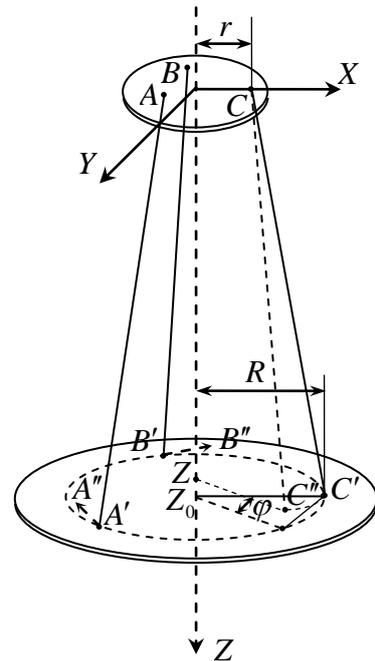


Рис. 8.4

Вычитая из одного уравнения другое, получаем

$$0 = 2Rr - 2Rr \cos \alpha_0 + h^2 - 2Hh, \text{ или } 2Hh - h^2 = 2Rr(1 - \cos \alpha_0) = 4Rr \sin^2 \frac{\alpha_0}{2},$$

$$h = \frac{4Rr \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}}{2H - h}.$$

Считая, что  $H \gg h$ , угол поворота мал и  $H^2 = L^2 - (R - r)^2 \approx L^2$ , получаем

$$h = \frac{Rr\alpha_0^2}{2L}. \quad (8.16)$$

Подставив в (8.15) имеем

$$\frac{mgRr}{L} = I \frac{4\pi^2}{T^2}.$$

Откуда

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2L}, \text{ или } T^2 = \frac{4\pi^2LI}{mgRr}. \quad (8.17)$$

Если  $t$  – время  $n$  колебаний платформы, то  $T = t/n$  и формулы (8.17) принимают вид

$$I = \frac{mgRrt^2}{4\pi^2n^2L}, \text{ или } t^2 = \frac{4\pi^2n^2LI}{mgRr}. \quad (8.18)$$

Пусть  $m_0$  – масса платформы,  $t_0$  – время колебаний платформы,  $M = m_0 + m$  – масса платформы и положенного на неё тела массой  $m$ ,  $t$  – время колебаний такой системы. По формуле (8.18) может быть определён момент инерции ненагруженной платформы и момент инерции системы «платформа+тело».

Так как момент инерции – величина аддитивная, то момент инерции самого тела представляет собой разность двух последних величин

$$I = I_{\text{П+тело}} - I_{\text{П}} = \frac{gRrt^2}{4\pi^2n^2L}M - \frac{gRrt_0^2}{4\pi^2n^2L}m_0.$$

$$I = \frac{gRr}{4\pi^2n^2L} \left( (m_0 + m)t^2 - m_0t_0^2 \right). \quad (8.19)$$

### Колебания пустой платформы

Так как момент инерции диска (круглой платформы)

$$I_{\text{П}} = \frac{1}{2}m_0R^2, \quad (8.20)$$

то период колебаний пустой платформы из (8.17) равен

$$T_0^2 = \frac{2\pi^2LR}{gr}, \quad (8.21)$$

и не зависит от её массы. Это вполне реально проверить на установке.

## Описание установки

Установка изображена на рис. 8.5. Она состоит из кронштейна 1, трифилярного подвеса, включающего в себя верхний диск 2 радиуса  $r$ , три нити длиной  $L$ , платформу 4 радиуса  $R$ , массой  $m_0$ . Для приведения подвеса в движение используется пусковой механизм 5.

*Реальные параметры определяются измерением или указаны на самой установке!*

## Экспериментальная часть

**Внимание!** Количество колебаний задаёт преподаватель.

При измерениях амплитуда колебаний не должна превышать  $5 - 6^\circ$ .

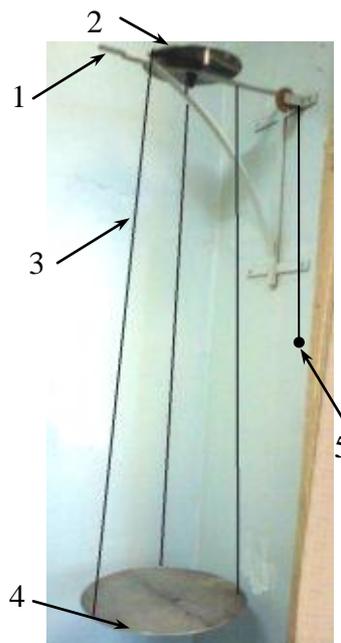


Рис.8.5

## I. Один короткий стержень

*(если предполагается выполнение только*

*I задания, то можно использовать длинный стержень).*

1. Уточнить параметры установки. Результаты внести в таблицу 1 (учтите, что нить растягивается, поэтому измерения её длины, при необходимости, проведите с пустой платформой и с грузом).
2. Измерить длину  $l_1$  (линейкой) и массу  $m_1$  (при помощи весов технических) стержня. Результаты внести в таблицу 2.
3. Рассчитать теоретический момент инерции одного стержня относительно центра масс  $I_{C10T}$  по формуле (8.8). Определить погрешности. Результаты внести в таблицу 5.
4. Привести установку в движение с помощью пускового механизма 5. Подождать  $5 \div 10$  колебаний, чтобы процесс установился.
5. Измерить время  $n$  полных колебаний пустой платформы. Измерение повторить не менее 10 раз. Результаты внести в таблицу 3.
6. Рассчитать из экспериментальных данных период колебаний пустой платформы  $T_{0Э}$  и сравнить с периодом  $T_{0T}$ , вычисленным теоретически по формуле (8.21), определив  $\varepsilon = \frac{|T_{0T} - T_{0Э}|}{T_{0T}} \cdot 100\%$ . Если разница составляет более 1%, то уточнить условия проведения эксперимента и параметры установки. Результат внести в таблицу 4.
7. Положить на платформу короткий стержень (рис. 8.6) и провести



Рис.8.6

составляет более 1%, то уточнить условия проведения эксперимента и параметры установки. Результат внести в таблицу 4.

7. Положить на платформу короткий стержень (рис. 8.6) и провести

измерение времени  $n$  полных колебаний платформы со стержнем не менее 10 раз. Результаты внести в таблицу 3.

*Тела на платформу необходимо класть строго симметрично так, чтобы не было её перекоса.*

8. Рассчитать из данных эксперимента момент инерции стержня относительно центра масс  $I_{C10Э}$  по формуле (8.19). Определить погрешности и записать результат в таблицу 5.
9. Сравнить результаты. Сделать вывод.

## II. Два коротких стержня

1. Выполнить пункты 1 – 7 из задания I.
2. Измерить длину  $l_2$  и массу  $m_2$  второго стержня. Результаты внести в таблицу 2.
3. Рассчитать момент инерции стержня  $I_{C20Т}$  относительно центра масс по формуле (8.8). Определить погрешности. Результаты внести в таблицу 5.
4. Так как стержни практически одинаковы, то найти среднее значение момента инерции двух стержней относительно центра масс  $\langle I_{C0Т} \rangle$ . Результаты внести в таблицу 5.
5. Положить на платформу два стержня, как показано на рисунке 8.7, и вновь провести измерения времени. Результаты внести в таблицу 3.
6. Рассчитать по данным эксперимента средний момент инерции стержня  $\langle I_{CЭ} \rangle$  относительно его конца по формуле (8.19). *(Не забудьте результат уменьшить в 2 раза, так как 2 стержня!)*
7. Определить погрешности и записать результат в таблицу 5.
8. Определить теоретическое значение среднего момента инерции стержня относительно его конца  $\langle I_{СТ} \rangle$  по формуле (8.5). Результаты записать в таблицу 5 и сравнить с экспериментальным.
9. Из формул (8.5) и (8.8) следует, что  $I_C = 4I_{C0}$ . По данным эксперимента определить средний момент инерции стержней  $\langle I_{C0Э} \rangle$  относительно центра масс. Результаты записать в таблицу 5.
10. Сравнить моменты инерции стержня относительно центра масс: средний теоретический  $\langle I_{C0Т} \rangle$ , из 1-го эксперимента  $I_{C10Э}$ , средний из 2-го эксперимента  $\langle I_{C0Э} \rangle$ . Сделать вывод.
11. Сравнить моменты инерции стержня относительно конца: средний теоретический  $\langle I_{СТ} \rangle$ , средний из 2-го эксперимента  $\langle I_{CЭ} \rangle$ . Сделать вывод.

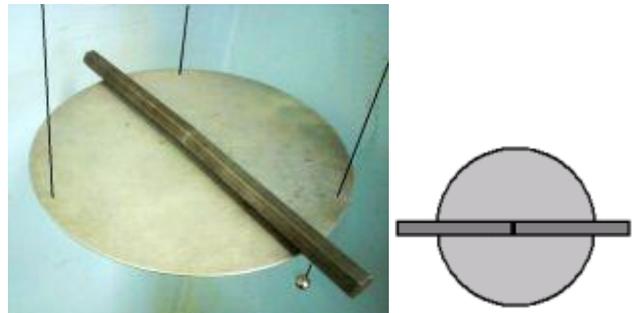


Рис.8.7

### III. Другой способ расчёта

Записав формулу (8.17) дважды для пустой платформы и платформы с грузом, можно получить

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{I}{I_{\Pi}} \frac{m_0}{m} = \frac{I_{\Pi} + I_{\text{гр}}}{I_{\Pi}} \frac{m_0}{m_0 + m_{\text{гр}}},$$

где  $I_{\text{гр}}$  – момент инерции груза,  $m_{\text{гр}}$  – его масса,  $I_{\Pi}$  – момент инерции пустой платформы. Отсюда

$$I_{\text{гр}} = I_{\Pi} \left[ \frac{T^2}{T_0^2} \left( 1 + \frac{m_{\text{гр}}}{m_0} \right) - 1 \right], \text{ или } I_{\text{гр}} = I_{\Pi} \left[ \frac{t^2}{t_0^2} \left( 1 + \frac{m_{\text{гр}}}{m_0} \right) - 1 \right], \quad (8.23)$$

если брать одинаковое число колебаний.

1. Воспользуйтесь результатами выполнения заданий I и II или выполните пункты 2 – 5.
2. Запишите параметры платформы в таблицу 1. Измерьте время  $n$  полных колебаний пустой платформы. Измерение повторить не менее 10 раз. Результаты внести в таблицу 3.
3. Повторите все действия с одним коротким стержнем, двумя короткими стержнями и длинным стержнем. Результаты внесите в таблицу 3.
4. Измерьте массы и длины всех стержней. Результаты внесите в таблицу 2.
5. Рассчитайте моменты инерции для всех стержней относительно центра масс по формуле (8.8). Результаты внесите в таблицу 5.
6. Рассчитайте момент инерции пустой платформы  $I_{\Pi}$  по формуле (8.20). Результат внесите в таблицу 5.
7. Рассчитайте по формуле (8.23) моменты инерции стержней относительно центра масс для каждого случая. (*Будьте аккуратны в случае двух стержней*).
8. Сравните результаты с учётом погрешностей. Сделайте выводы.

### Контрольные вопросы

1. Что характеризует момент инерции тела или механической системы?
2. Запишите формулу для расчёта момента инерции тела.
3. Как направлены угловая скорость, угловое ускорение, момент силы и момент импульса системы при вращении трифилярного подвеса.
4. Сформулируйте теорему Штейнера.
5. Рассчитайте момент инерции системы материальных точек массой  $m$ , закреплённых в вершинах куба стороной  $a$ , если ось вращения совпадает с ребром куба.
6. Найдите отношение моментов инерции  $I_A/I_B$  квадратной рамки со стороной  $a$  (рис.8.8).

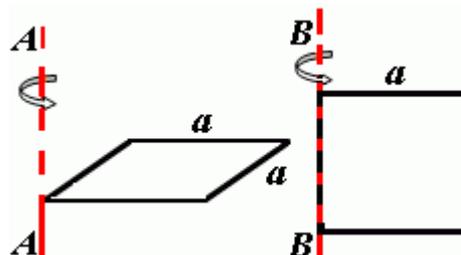


Рис.8.8

**Лабораторная работа № 8. Лист отчёта**  
**Определение момента инерции тела методом крутильных колебаний**  
**с помощью трифилярного подвеса**

Выполнил студент \_\_\_\_\_  
 Факультет \_\_\_\_\_ курс \_\_\_\_\_ группа \_\_\_\_\_  
 Проверил \_\_\_\_\_  
 Показания сняты \_\_\_\_\_  
 Зачтено \_\_\_\_\_

Погрешности измерительных приборов.  $\alpha =$  \_\_\_\_\_ %

Измерительный прибор	$\omega$ – цена деления	$\Delta_{\text{окр}}$ – округления	$\Delta_{\text{пр}}$ – приборная	$\Delta_{\text{суб}}$ – субъективная	Единицы измерения
Секундомер					
Стальная линейка (1 м)					
Технические весы					

Результаты измерений

Таблица 1

$r =$	$\Delta r =$	$\varepsilon_r =$
$R =$	$\Delta R =$	$\varepsilon_R =$
$m_0 =$	$\Delta m_0 =$	$\varepsilon_{m_0} =$
$L =$	$\Delta L =$	$\varepsilon_L =$

Таблица 2

$m_1 =$	$\Delta m_1 =$	$\varepsilon_{m_1} =$
$l_1 =$	$\Delta l_1 =$	$\varepsilon_{l_1} =$
$m_2 =$	$\Delta m_2 =$	$\varepsilon_{m_2} =$
$l_2 =$	$\Delta l_2 =$	$\varepsilon_{l_2} =$
$m_3 =$	$\Delta m_3 =$	$\varepsilon_{m_3} =$
$l_3 =$	$\Delta l_3 =$	$\varepsilon_{l_3} =$

Количество колебаний  $n =$

Таблица 3

$i$	платформа		1 стержень		2 стержня		длинный стержень	
	$t_{0i}, \text{с}$	$\Delta t_{0i}^2, \text{с}^2$	$t_{1i}, \text{с}$	$\Delta t_{1i}^2, \text{с}^2$	$t_{2i}, \text{с}$	$\Delta t_{2i}^2, \text{с}^2$	$t_{3i}, \text{с}$	$\Delta t_{3i}^2, \text{с}^2$
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								

$\bar{t}_0 =$	$\bar{t}_1 =$	$\bar{t}_2 =$	$\bar{t}_3 =$
$\Delta\bar{t}_0 =$	$\Delta\bar{t}_1 =$	$\Delta\bar{t}_2 =$	$\Delta\bar{t}_3 =$
$\varepsilon_{\bar{t}_0} =$	$\varepsilon_{\bar{t}_1} =$	$\varepsilon_{\bar{t}_2} =$	$\varepsilon_{\bar{t}_3} =$

Таблица 4

$T_{0Э} =$	$T_{0Т} =$	$\varepsilon =$
------------	------------	-----------------

Формулы для расчёта косвенных измерений

Ответ:

Таблица 5

Величина	Значение		Абсолютная погрешность	Единицы измерения	Относительная погрешность, %
$I_{C10T} =$		$\pm$			
$I_{C10Э} =$		$\pm$			
$I_{C20T} =$		$\pm$			
$\langle I_{C0T} \rangle =$		$\pm$			
$\langle I_{C0Э} \rangle =$		$\pm$			
$\langle I_{CT} \rangle =$		$\pm$			
$\langle I_{CЭ} \rangle =$		$\pm$			
$I_{П} =$		$\pm$			
$I_{C10Э3} =$		$\pm$			
$\langle I_{C0Э3} \rangle =$		$\pm$			
$\langle I_{CЭ3} \rangle =$		$\pm$			
$I_{C3T} =$		$\pm$			
$I_{C3Э} =$		$\pm$			

Пояснения к таблице: Моменты инерции:

$I_{C10T}$  – 1 - й стержень, относительно центра, теоретический; (задание 1).

$I_{C10Э}$  – 1 - й стержень, относительно центра, экспериментальный; (задание 1)

$I_{C20T}$  – 2 - й стержень, относительно центра, теоретический; (задание 2).

$\langle I_{C0T} \rangle$  – средний 1-го и 2-го стержней, относительно центра, теоретический; (задание 2).

$\langle I_{C0Э} \rangle$  – средний 1-го и 2-го стержней, относительно центра, экспериментальный; (задание 2).

$\langle I_{CT} \rangle$  – средний 1-го и 2-го стержней, относительно конца, теоретический; (задание 2).

$\langle I_{CЭ} \rangle$  – средний 1-го и 2-го стержней, относительно конца, экспериментальный; (задание 2).

$I_{П}$  – пустой платформы, теоретический; (задание 3).

$I_{C10Э3}$  – 1 - й стержень, относительно центра, экспериментальный; (задание 3)

$\langle I_{C0Э3} \rangle$  – средний 1-го и 2-го стержней, относительно центра, экспериментальный; (задание 3).

$\langle I_{CЭ3} \rangle$  – средний 1-го и 2-го стержней, относительно конца, экспериментальный; (задание 3).

$I_{C3T}$  – длинный стержень, относительно центра, теоретический; (задание 3).

$I_{C3Э}$  – длинный стержень, относительно центра, экспериментальный; (задание 3).

Интервалы сравнений