Лабораторная работа № 6
Определение модуля упругости по изгибу стержня

Цель работы: *изучить физические закономерности упругой деформации при изгибе, приобрести навыки работы с микроскопом для измерения величины стрелы прогиба.*

Оборудование: *измерительный микроскоп, штатив, набор грузов, микрометр, стальные стержни круглого и прямоугольного сечения, подставка, стальная метровая линейка.*

Теоретическая часть

Деформации

Изменение формы тела или его объёма под действием сил называется деформацией.

Упругими называются деформации, исчезающие после снятия внешнего воздействия.

Пластическими (остаточными) называются деформации, которые сохраняются после прекращения действия сил.

Силами упругости называются силы, возникающие при упругих деформациях.

Природа этих сил, так же как и природа сил трения, связана с межмолекулярными взаимодействиями, которые в свою очередь объясняются электромагнитной теорией.

В зависимости от точек приложения внешних сил и их направления различают разные виды деформации (рис. 6.1).

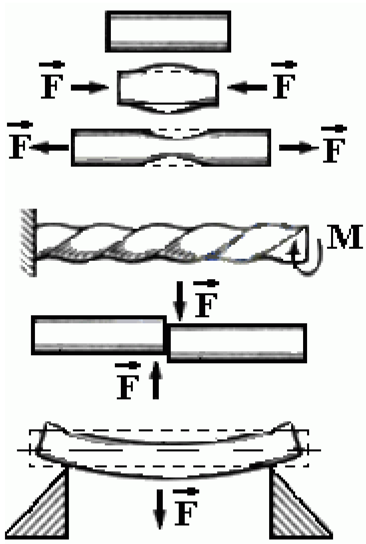


Рис.6.1

При деформации растяжения или сжатия под действием внешних сил тело растягивается или сжимается. Деформацию растяжения испытывают тросы, канаты, цепи в подъёмных устройствах, сцепки между вагонами и так далее. Деформацию сжатия испытывают колонны, стены, фундаменты зданий.

При деформации кручения отдельные слои тела остаются параллельными, но поворачиваются друг относительно друга на некоторый угол. Деформациям кручения подвергаются валы машин, свёрла, болты при закручивании гаек и так далее.

При деформации сдвига под действием внешних сил одна часть тела сдвигается относительно другой. Деформациям сдвига подвержены, например, заклёпки и болты, скрепляющие детали. При этих деформациях может произойти разрушения тела – срез. Срез происходит при работе ножниц, долота, зубила, зубьев пилы и так далее.

При деформации изгиба тело под действием внешних сил изгибается. При этом одни слои тела растягивается, другие сжимаются, а длина некоторого среднего слоя, который называется нейтральным, не изменяется.

Все деформации, как бы сложны они не были, могут быть сведены к той или иной комбинации двух деформаций – растяжения (сжатия) и сдвига.

Закон Гука[1]

Сила, отнесённая к единице площади, называется механическим напряжением[2] (рис. 6.2)

$$\vec{\sigma}_n = \frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}S}. \tag{6.1}$$

Пусть имеется стержень, на который подействовали с силой F. Если стержень растянут, то модуль этого напряжения называют натяжением. Если стержень сжат, то модуль напряжения называют давлением.

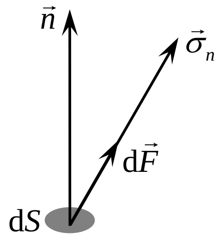


Рис.6.2

Отношение модуля нормальной силы к площади поверхности, на которую она действует, называется давлением

$$p = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S}. \tag{6.2}$$

Давление можно рассматривать как отрицательное растяжение, или наоборот.

Пусть начальная длина стержня – l_0 (рис. 6.3). Под действием силы стержень удлинится на величину Δl. Изменение длины стержня называется абсолютным удлинением

$$\Delta l = l - l_0. \tag{6.3}$$

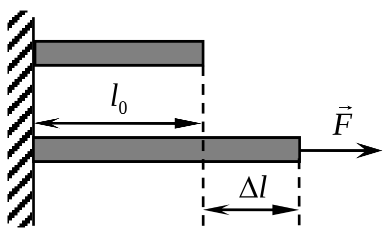


Рис.6.3

Эта величина может быть как положительной, так и отрицательной.

Отношение модуля абсолютного удлинения к начальной длине называется относительным удлинением

$$\varepsilon = \frac{|\Delta l|}{l_0}. \tag{6.4}$$

[1] Гук (Хук) Роберт (Robert Hooke) (1635 – 1703) – английский естествоиспытатель, разносторонний учёный и экспериментатор, архитектор. Открыл в 1660 г. закон, названный его именем. Высказал гипотезу тяготения. Сторонник волновой теории света. Улучшил и изобрёл многие приборы, установил (совместно с Х. Гюйгенсом) постоянные точки термометра. Усовершенствовал микроскоп и установил клеточное строение тканей, ввёл термин «клетка».

[2] Здесь использовано упрощённое понятие напряжения.

Из экспериментальных данных известен закон Гука: для упругих деформаций механическое напряжение пропорционально относительному удлинению

$$\sigma = E\varepsilon . \tag{6.5}$$

Коэффициент пропорциональности E называют модулем Юнга[3]. Он зависит только от материала стержня и его физического состояния, например, от температуры. По смыслу модуль Юнга численно равен натяжению, которое нужно приложить к стержню, чтобы его длина удвоилась, если бы при такой деформации закон Гука ещё оставался справедливым.

Закон Гука можно записать в векторном виде

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \Rightarrow \quad \frac{\vec{F}}{S} = -E\frac{\Delta\vec{r}}{l_0}, \quad \Rightarrow$$

$$\vec{F} = -\frac{ES}{l_0}\Delta\vec{r} . \tag{6.6}$$

Под силой упругости будем понимать силу, действующую со стороны упруго деформированного тела на некоторое другое тело. Кстати, сила нормальной реакции опоры или сила реакции подвеса есть не что иное, как сила упругости.

Для упругих деформаций сила упругости прямо пропорциональна величине деформации и направлена в сторону, противоположную направлению перемещения, возникающего в теле при созданной деформации

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{r} , \tag{6.7}$$

где $k=ES/l_0$ – коэффициент жёсткости. Считается, что при малых деформациях эта величина не меняется. Последняя формула в скалярном варианте имеет вид

$$F = k\left|\Delta l\right|. \tag{6.8}$$

При расчётах деформации необходимо знать модуль Юнга того материала, который подвергается деформации.

Описание эксперимента

Деформация изгиба стержня характеризуется стрелой прогиба λ, то есть расстоянием, на которое перемещается середина стержня под действием деформирующей силы (рис. 6.5).

[3] Юнг (Янг) Томас (Thomas Young) (1773-1829) – английский учёный, один из основоположников волновой теории света. Сформулировал принцип интерференции (1801 г.), высказал идею о поперечности световых волн (1817 г.). Объяснил аккомодацию глаза, разработал теорию цветного зрения. Ввёл характеристику упругости (модуль Юнга). Труды по акустике, астрономии, расшифровке египетских иероглифов.

Пусть под действием некоторой вертикально направленной силы, например, веса груза, горизонтально расположенный стержень (балка) очень малой длины изогнулся. Из рисунка 6.4 видно, что слой BB′ подвергся сжатию, слой AA′ подвергся растяжению, а слой CC′ не изменил своей длины. Он называется нейтральным слоем (линией).

После изгиба нейтральная линия представляет собой дугу, длина которой l_0 равна

$$l_0 = R\mathrm{d}\alpha\,, \tag{6.9}$$

где R – радиус кривизны.

Длина линии AA′ равна

$$l = (R+\xi)\mathrm{d}\alpha\,,$$

а изменение длины

$$\mathrm{d}l = l - l_0 = \xi\mathrm{d}\alpha\,. \tag{6.10}$$

Следовательно,

$$\frac{\mathrm{d}l}{l_0} = \frac{\xi}{R}\,, \tag{6.11}$$

а напряжение в этом слое

$$\sigma = E\frac{\mathrm{d}l}{l_0} = E\frac{\xi}{R}. \tag{6.12}$$

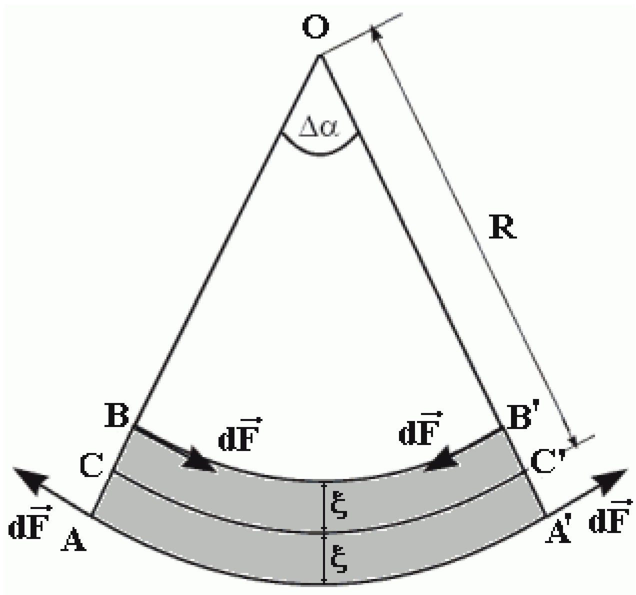


Рис.6.4

Сила, которая действует на поперечное сечение S стержня, проходящее через линию, например, ACB, равна

$$F = \int_S \sigma\mathrm{d}S = \frac{E}{R}\int_S \xi\mathrm{d}S\,. \tag{6.13}$$

Очевидно, что суммарная сила равна 0.

Модуль вращающего момента относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку C, равен

$$M = \int \xi\mathrm{d}F = \frac{E}{R}\int_S \xi^2\mathrm{d}S = \frac{E}{R}I\,, \tag{6.14}$$

где величину I иногда называют моментом инерции поперечного сечения, хотя она имеет только геометрический смысл.

Пусть теперь стержень длиной L лежит на двух опорах, а в середине на него действует сила P (рис. 6.5).

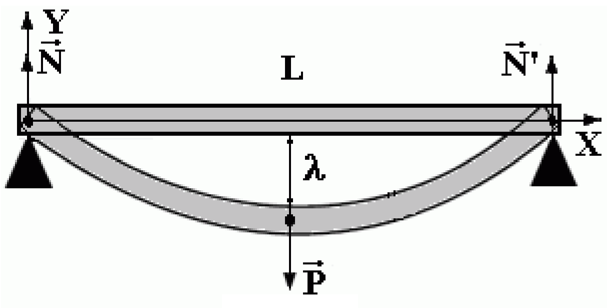


Рис.6.5

Из условия равновесия (сумма сил равна 0) и симметрии задачи следует

$$N = N' = \frac{P}{2}. \qquad (6.15)$$

Отсечём мысленно часть стержня до произвольной точки с координатой x (рис. 6.6). Тогда на эту часть будет действовать сила $P/2$, направленная вниз, которая создаёт вращающий момент

$$M = \frac{P}{2} x. \qquad (6.16)$$

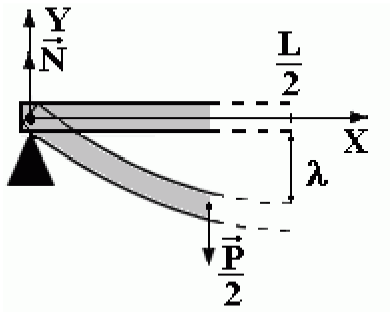


Рис.6.6

Сравнивая (6.14) и (6.16) получаем

$$\frac{E}{R} I = \frac{P}{2} x \text{ или } \frac{1}{R} = \frac{P}{2EI} x. \qquad (6.17)$$

Из курса математики известно, что для плоской кривой $y=f(x)$, заданной аналитически, радиус кривизны можно определить как

$$R = \frac{(1 + f'^2)^{3/2}}{|f''|}. \qquad (6.18)$$

Если считать, что $f'(x) << 1$, то

$$R = \frac{1}{|f''|}. \qquad (6.19)$$

Окончательно получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{P}{2EI} x, \quad \text{или} \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = hx, \quad \text{где} \quad h = \frac{P}{2EI}. \qquad (6.20)$$

Это уравнение имеет решение в виде

$$y = h\frac{x^3}{6} + \mathrm{const}_1 x + \mathrm{const}_2 \qquad (6.21)$$

Из рисунка видно, что $y(x=0)=0$, следовательно, $\mathrm{const}_2=0$. При $x=L/2$ функция имеет минимум, то есть производная равна нулю. Отсюда $\mathrm{const}_1=-hL^3/8$.

Таким образом, получаем уравнение линии изгиба стержня

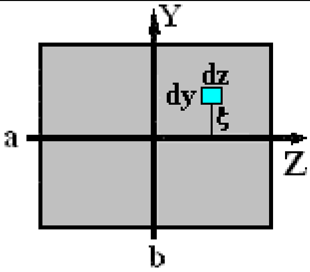
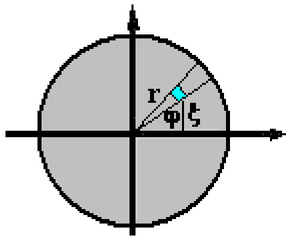
$$y = h\frac{x^3}{6} - h\frac{L^2}{8} x. \qquad (6.22)$$

Координата при $x=L/2$

$$y = h\frac{L^3}{48} - h\frac{L^3}{16} = -h\frac{L^3}{24}. \qquad (6.23)$$

Модуль этой величины и есть стрела прогиба

$$\lambda = \frac{PL^3}{48EI}. \qquad (6.24)$$

Для стержня прямоугольного сечения толщиной a и шириной b	Для стержня круглого сечения радиуса r или диаметра D
 $I = \int\limits_S \xi^2 \mathrm{d}S = \int\limits_{-a/2}^{a/2}\int\limits_{-b/2}^{b/2} y^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{a^3 b}{12}$	 $I = \int\limits_S \xi^2 \mathrm{d}S = \iint \xi^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \begin{pmatrix} \textit{так как} \\ \xi = r\sin\varphi \end{pmatrix} = \int\limits_0^r r^2 r\mathrm{d}r \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{r^4}{4}\pi = \pi\frac{D^4}{64}$
$\lambda = \frac{PL^3}{4Ea^3b}$	$\lambda = \frac{4PL^3}{3\pi ED^4}$
$E = \frac{L^3}{4ba^3}\frac{P}{\lambda}$ (6.25)	$E = \frac{4L^3}{3\pi D^4}\frac{P}{\lambda}$ (6.26)

Здесь P – вес нагрузки, L – расстояние между призмами, b – ширина стержня, a – толщина стержня, D – диаметр поперечного сечения стержня, E – модуль Юнга, λ – стрела прогиба.

Описание установки

Установка для определения модуля Юнга по изгибу стержня (рис. 6.7) состоит из основания 1 с двумя стойками 2. На стойках укреплены стальные призмы 3 так, что их рёбра параллельны между собой. Микроскоп 4 для определения вертикальных расстояний закрепляется на штативе 5 в горизонтальном положении и может перемещаться по штативу в вертикальном направлении.

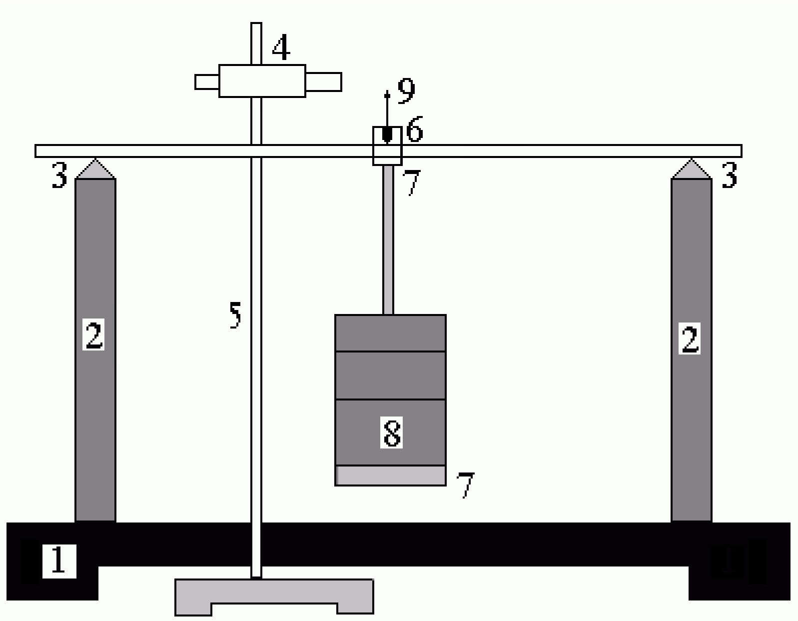


Рис.6.7

К середине стержня подвешивают стремя 6 с подставкой 7 для размещения грузов 8. На стремени укреплена игла 9, положение конца которой и определяется с помощью микроскопа.

Фокусировку микроскопа производят, предварительно раздвинув окулярную шкалу, как правило, на 130 делений, перемещением штатива с микроскопом к платформе или от неё. Если микроскоп сфокусирован на остриё иглы, то расстояние между объективом и остриём равно примерно 3÷4 см.

Чтобы выразить стрелу прогиба в миллиметрах, нужно число отсчитанных делений умножить на соответствующую цену деления окулярной шкалы. Цена деления зависит от длины тубуса. Значение цены деления можно определить из таблицы 1, которая взята из паспорта микроскопа.

Таблица 1.

Число делений тубуса	Цена деления шкалы, мм
130	0,058
150	0,049
170	0,041

На рис. 6.8 приведено фото установки.

Рис. 6.8

Экспериментальная часть

I. Исследование одного стержня

1. Раздвинуть тубус на требуемое значение (оптимально 130 делений) и по таблице 1 определить цену деления шкалы микроскопа.
2. На призмы 3 положить стержень из исследуемого материала так, чтобы середина его совпадала с серединой расстояния между призмами.
3. Поместить в середине стержня стремя с подставкой для грузов.
4. Перемещая штатив с микроскопом и микроскоп вдоль штатива, добиться, чтобы остриё иглы было резко видно в нижней части окулярной шкалы вблизи нуля (если получится, то на 0). Записать деление шкалы λ_0, против которого видно остриё иглы. Заметим, что при этом стержень изогнут под действием собственного веса, стремени и подставки P_0.
5. Добавлять на подставку последовательно один, два, три и так далее грузы с известным весом, начиная с большего. Каждый раз при этом определять, против какого деления $\lambda_{N,1}$ будет располагаться конец иглы. Также записывать суммарный вес добавленных грузов P_N-P_0. Вес каждого груза указан на нём самом. Результаты измерений записывать в таблицу 2.
6. Снять все грузы. Проверить, что остриё иглы по-прежнему совпадает с λ_0, при необходимости подрегулировать устройство, и повторить пункт 5 ещё три раза, чтобы иметь несколько значений $\lambda_{N,i}$ для каждой нагрузки.
7. Разгрузить стержень и снять его с подставки.
8. Рассчитать для каждой из нагрузок значение $\bar{\lambda}_N$ в делениях, затем $\bar{\lambda}_N - \lambda_0$ в делениях, а затем $\bar{\lambda}_N - \lambda_0$ в миллиметрах.
9. Измерить один раз расстояние L между рёбрами призм 3 с помощью стальной метровой линейки с ценой деления 1 мм.
10. С помощью микрометра для стержня прямоугольного сечения измерить его толщину a и ширину b, или для стержня круглого сечения его диаметр D в 10 различных местах. Результаты внести в таблицу 3.
11. Построить график зависимости стрелы прогиба от величины нагрузки $\lambda - \lambda_0 = f(P\text{-}P_0)$ и убедиться, что имеет место линейная зависимость между ними, то есть деформация остаётся упругой и не переходит в пластическую. Если зависимость линейная, то можно вычислять модуль Юнга.
12. Рассчитать в зависимости от формы сечения стержня по формулам

$$E = \frac{L^3}{4ba^3}\frac{P - P_0}{\bar{\lambda} - \lambda_0}, \text{ или } E = \frac{4L^3}{3\pi D^4}\frac{P - P_0}{\bar{\lambda} - \lambda_0}$$

значения модуля Юнга для каждого случая. Результаты внести в таблицу 2.

13. Рассчитать среднее значение модуля Юнга. Результат внести в таблицу 4.
14. Рассчитать для каждого случая погрешности. Результаты внести в таблицы 2 и 4. Считать, что абсолютная погрешность каждого груза составляет 0,02 Н.
15. Сравните полученное значение модуля Юнга с табличными данными. Определите материал стержня.

II. Определение модуля Юнга по графику

1. Выполнить первое задание.
2. Методом наименьших квадратов построить линейный тренд зависимости $\bar{\lambda}_N - \lambda_0 = f(P_N - P_0)$. Определить коэффициент наклона прямой k. Определить модуль Юнга. Сравнить полученные результаты. Сделать вывод.

III. Исследование двух стержней разного сечения

1. Выполнить задание I и II для стержня другого сечения.
2. Сравнить полученные результаты. Сделать вывод.

Контрольные вопросы

1. Какие виды деформаций вы знаете?
2. Какие деформации называют упругими, пластическими?
3. Сформулируйте закон Гука.
4. Каков физический смысл модуля Юнга?
5. По каким формулам определяется модуль Юнга для стержней прямоугольного и круглого сечений?
6. Объясните вид графика зависимости стрелы прогиба от нагрузки. Любая ли упругая деформация будет иметь подобный график?
7. Опишите упругие деформации стальной пружины и резинового жгута.
8. Опишите установку для определения модуля Юнга по изгибу стержня.

Литература

1. Сивухин, Д. В. Общий курс физики: В 5 т. / Д. В. Сивухин. – 5-е изд., стер.– М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2010.– Т. 1. Механика. – 560 с. (§80).
2. Стрелков, С. П. Общий курс физики. Механика / С. П. Стрелков.– 3-е изд.– М.: Наука, 1975. – 560 с. (гл. X, §§ 86 – 92).
3. расчёт прогиба балки при распределённой нагрузке [Электронный ресурс]. URL: http://www.math24.ru/beam-deflection.html. (дата обращения 07.08.2017).

Лабораторная работа № 6. Лист отчёта
Определение модуля упругости по изгибу стержня

Выполнил студент ______________________________
Факультет ________ курс _____ группа __________
Проверил ______________________________
Показания сняты ______________________________
Зачтено ______________________________

Погрешности измерительных приборов. $\alpha =$______%

Измерительный прибор	ω – цена деления	$\Delta_{окр}$ – округления	$\Delta_{пр}$ – приборная	$\Delta_{суб}$ – субъективная	Единицы измерения
Микрометр					
Микроскоп					
Стальная линейка (1м)					

Результаты измерений

Таблица 2

Номер опыта i			1	2	3	4	$\lambda_0 =$ дел.				
N	P_N-P_0, Н	ΔP_N, Н	$\lambda_{N,1}$, дел.	$\lambda_{N,2}$, дел.	$\lambda_{N,3}$, дел.	$\lambda_{N,4}$, дел.	$\bar{\lambda}_N$, дел.	$\bar{\lambda}_N - \lambda_0$ дел.	$\bar{\lambda}_N - \lambda_0$, мм	E_N, ГПа	ΔE_N, ГПа
1											
2											
3											
4											
5											

Таблица 3

$L =$			$\Delta L =$		$\varepsilon_L =$	
i	a_i, мм	$\left(a_i - \bar{a}\right)^2$, мм^2	b_i, мм	$\left(b_i - \bar{b}\right)^2$, мм^2	D_i, мм	$\left(D_i - \bar{D}\right)^2$, мм^2
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
	$\bar{a} =$	$\Delta\bar{a} =$	$\bar{b} =$	$\Delta\bar{b} =$	$\bar{D} =$	$\Delta\bar{D} =$
	$\varepsilon_{\bar{a}} =$		$\varepsilon_{\bar{b}} =$		$\varepsilon_{\bar{D}} =$	

Формулы для расчёта косвенных измерений

Ответ:

Таблица 4

Величина	Значение		Абсолютная погрешность	Единицы измерения	Относительная погрешность, %
$\bar{E}_{\text{плоский}} =$		±			
$\bar{E}_{\text{плоский}} =$ по графику		±			
$\bar{E}_{\text{круглый}} =$		±			
$\bar{E}_{\text{круглый}} =$ по графику		±			
$E_{\text{таб}} =$		±			

Интервалы сравнений