

## Лабораторная работа № 5

### Изучение законов вращательного движения на маятнике Обербека

**Цель работы:** проверить справедливость основного уравнения динамики вращательного движения абсолютно твёрдого тела (АТТ) с помощью маятника Обербека<sup>1</sup>.

**Оборудование:** маятник Обербека, набор грузов, секундомер, линейка.

### Теоретическая часть

#### Вращательное движение АТТ вокруг оси

Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси  $OZ$  описывается уравнением

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = I_z \varepsilon_z = \sum_{i=1}^n M_{zi}, \quad (5.1)$$

где  $I_z$  – момент инерции тела относительно оси  $OZ$ ,  $\varphi$  – угол поворота тела,  $M_{zi}$  – проекция на ось вращения момента внешней  $i$ -й силы, действующей на тело,  $\varepsilon_z$  – угловое ускорение.

#### Маятник Обербека

Этот маятник представляет собой крестовину, состоящую из четырёх стержней, прикреплённых к шкиву, который с помощью шарикоподшипников может вращаться с малым трением вокруг неподвижной оси  $OZ$ . На стержни надеваются одинаковые грузы  $m_{k1}$ ,  $m_{k2}$ ,  $m_{k3}$ ,  $m_{k4}$ , которые могут быть закреплены на различных расстояниях от оси вращения. На шкив наматывается нить, к свободному концу которой прикрепляется платформа массы  $m_0$ , служащая для размещения грузов массой  $m_{pn}$  каждый. Под действием груза нить разматывается и приводит маятник во вращательное движение.



Рис. 5.1

<sup>1</sup> Обербек Антон (Anton Oberbeck) (1846 – 1900) – немецкий физик. Учился в Гейдельберге и Берлинском университете, получил докторскую степень в последнем в 1868 г. Изучал физику под руководством Магнуса, а впоследствии, будучи учителем в одной из берлинских гимназий, работал в лаборатории Гельмгольца. Читал лекции в Галле и Карлсруэ и проводил исследования в университете Грайфсвальда (Greifswald), а затем в университете Тюбингена. Профессор физики Тюбингенского университета. Главная заслуга – основание физического института при Грайфсвальдском университете. Основные работы по гидродинамике, метеорологии, электричеству и магнетизму. Им изобретена дифференциальная тангенциальная буссоль и маятник Обербека (крест Обербека, Overbeck's Cross Pendulum).

На маятник действуют момент силы  $N_1$  и момент силы трения

$$I\varepsilon = N_1 R - M_{\text{тр}}. \quad (5.2)$$

Для груза теорема о движении центра масс имеет вид

$$ma = mg - N_2. \quad (5.3)$$

Связь между линейным и угловым ускорением также известна

$$a = \varepsilon R. \quad (5.4)$$

Груз движется с постоянным ускорением из состояния покоя

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (5.5)$$

Силы  $N_1$  и  $N_2$  равны из-за невесомости и нерастяжимости нити.

Комбинируя последние 4 уравнения, получаем

$$\frac{I}{R^2} a = m(g - a) - \frac{M_{\text{тр}}}{R}, \quad \text{или} \quad \left( \frac{I}{R^2} + m \right) a = gm - \frac{M_{\text{тр}}}{R}. \quad (5.6)$$

### Экспериментальная проверка

Уравнение (5.6) можно экспериментально проверить при разных приближениях.

#### А) Нулевое приближение

большой момент инерции	малое трение
$\frac{I}{R^2} \gg m, \quad (5.6.1)$	$m \gg \frac{M_{\text{тр}}}{gR}, \quad (5.6.2)$

Из (5.6) следует  $\frac{I}{R^2} a = gm$ . Откуда

$$\frac{I}{R^2} = X_{0_i} \approx \frac{m_i g}{a_i}. \quad (5.7)$$

Величина  $X$  имеет смысл некой массы, отвечающей за вращательные свойства маятника.

Формулу (5.7) можно переписать по-другому для двух (и более) грузов

$$Y_{0_{ij}} = \frac{m_i a_j}{m_j a_i} = \frac{m_i t_i^2}{m_j t_j^2} = 1. \quad (5.7a)$$

Таким образом, необходимо провести эксперимент с двумя (или несколькими) грузами. Сравнив между собой величины  $X$  или сравнив  $Y$  с единицей, можно подтвердить справедливость основного уравнения вращательного движения АТТ.

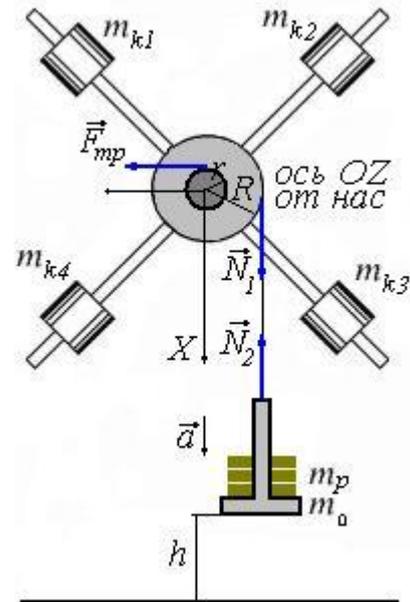


Рис.5.2

**Б) Первое приближение** (условие (5.6.2))

Из (5.6) следует  $\left(\frac{I}{R^2} + m\right)a = gm$  или  $a\frac{I}{R^2} = m(g - a)$ . Отсюда получаем

$$\frac{I}{R^2} = X_{1_i} \approx \frac{m_i(g - a_i)}{a_i} = m_i \left( \frac{g}{a_i} - 1 \right), \quad (5.8)$$

или

$$Y_{1_{ij}} = \frac{m_i \left( \frac{g}{a_i} - 1 \right)}{m_j \left( \frac{g}{a_j} - 1 \right)} = 1. \quad (5.8a)$$

Также можно проверять справедливость следующего соотношения

$$\frac{t_2^2}{t_1^2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_1(g - a_1)}{m_2(g - a_2)}. \quad (5.9)$$

**В) Второе приближение** (условие (5.6.1)).

Из (5.6) следует  $\frac{I}{R^2}a = gm - \frac{M_{\text{тр}}}{R}$ .

Записав для двух грузов и вычитая, получаем  $\frac{I}{R^2}(a_1 - a_2) = (m_1 - m_2)g$ .

$$\frac{I}{R^2} = X_{2_{12}} \approx \frac{m_1 - m_2}{a_1 - a_2} g.$$

Выполнив эксперимент для 3-х (и более) грузов можно записать

$$\frac{I}{R^2} = X_{2_{ij}} \approx \frac{m_i - m_j}{a_i - a_j} g, \quad (5.10)$$

или

$$Y_{2_{ijk}} = \frac{(m_i - m_j)(a_i - a_k)}{(m_i - m_k)(a_i - a_j)} = \frac{\left(1 - \frac{m_j}{m_i}\right)\left(1 - \frac{a_k}{a_i}\right)}{\left(1 - \frac{m_k}{m_i}\right)\left(1 - \frac{a_j}{a_i}\right)} = 1. \quad (5.10a)$$

**Г) Без приближений**

Записав (5.6) для двух грузов и вычитая, получаем

$$\frac{I}{R^2}(a_1 - a_2) = m_1(g - a_1) - m_2(g - a_2), \quad (5.11)$$

$$\frac{I}{R^2} = X_{3_{ij}} = \frac{m_i(g - a_i) - m_j(g - a_j)}{a_i - a_j}. \quad (5.12)$$

Записав (5.11) для 1 – 2-го грузов, а также 1 – 3-го грузов и поделив одно выражение на другое, получаем

$$\frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3} = \frac{m_1(g - a_1) - m_2(g - a_2)}{m_1(g - a_1) - m_3(g - a_3)}.$$

Перемножаем почленно, сокращаем подобные, группируем

$$Y_{3123} = \frac{m_2(g - a_2)(a_1 - a_3) + m_3(g - a_3)(a_2 - a_1)}{m_1(g - a_1)(a_2 - a_3)} = 1. \quad (5.13)$$

Это соотношение также можно проверить.

Наконец, для нахождения момента силы трения

$$\frac{M_{\text{тр}}}{R} = \frac{m_1(g - a_1)a_2 - m_2(g - a_2)a_1}{a_2 - a_1}. \quad (5.14)$$

### Описание установки

Установка изображена на рис. 5.3. Она состоит из маятника Обербека 1 и платформы для грузов 2 на нити. На стене закреплена опорная планка 3, высота которой над полом аудитории  $h = (1,90 \pm 0,01)$  м.

Масса платформы  $m_0 = (44,5 \pm 0,1)$  г.

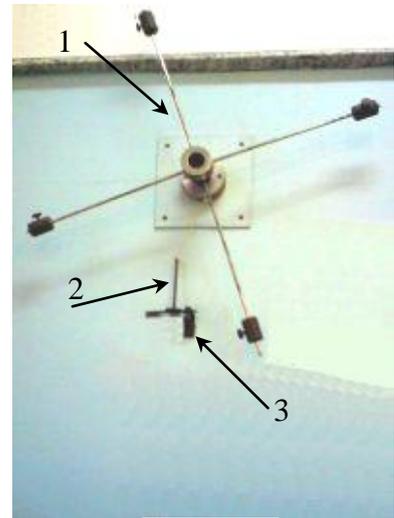


Рис.5.3

### Экспериментальная часть

*Внимание!*

*Количество грузов для проведения каждого эксперимента задаёт преподаватель.*

*Проверить, что грузы  $m_{k1}$ ,  $m_{k2}$ ,  $m_{k3}$ ,  $m_{k4}$  закреплены на равных расстояниях от оси вращения, а маятник находится в безразличном равновесии. Если это не так, то необходимо обратиться к преподавателю или лаборанту и под их присмотром путём небольших перемещений этих грузов вдоль стержней привести маятник в безразличное равновесие.*

*Грузы должны быть прочно закреплены на стержнях.*

*Категорически запрещается останавливать вращающийся маятник руками при быстром его вращении, а также находиться в плоскости его вращения.*

### I. Проверка в нулевом приближении

1. Разместить на платформе заданное количество грузов  $n$ , записав значения масс, указанных на каждом из них. Рассчитать суммарную массу груза и платформы  $m_1 = m_0 + m_{p1} + m_{p2} + \dots + m_{pn}$ . Результат внести в таблицу 1.

2. Вращая маятник, намотать нить на шкив и поднять груз на заданную высоту.
3. Аккуратно отпустить маятник и измерить время падения груза на пол с помощью секундомера. Эксперимент повторить не менее 10 раз. Результаты внести в таблицу 1.
4. Повторить пункты 1 – 3 для другого набора грузов.
5. Рассчитать средние значения времён.
6. По формуле (5.5) рассчитать значения ускорений.
7. Для удобства дальнейших вычислений все результаты свести в общую таблицу 2. Оценить абсолютную и относительную погрешности для масс, времён и ускорений во всех опытах.
8. Для обоих опытов выполнить расчёт величины  $X_{0i}$  по формуле (5.7). Результат внести в таблицу 3. Убедитесь, что приближение  $X_{0i} \gg m_i$  выполняется с большим запасом.
9. Выполнить расчёт величины  $Y_{0ij}$  по формуле (5.7a). Внести результат в таблицу 4.
10. Рассчитать погрешности этих величин. Если  $X_{0i}$  совпадают, а  $Y_{0ij}$  равна 1 в пределах погрешности, то эксперимент можно считать законченным. В противоположном случае перейти к заданию II.

### **II. Проверка в первом приближении**

1. Для обоих опытов выполнить расчёт величины  $X_{1i}$  по формуле (5.8). Результат внести в таблицу 3.
2. Выполнить расчёт величины  $Y_{1ij}$  по формуле (5.8a). Внести результат в таблицу 4.
3. Рассчитать погрешности этих величин. Если  $X_{1i}$  совпадают, а  $Y_{1ij}$  равна 1 в пределах погрешности, то эксперимент можно считать законченным. В противоположном случае перейти к заданию III.

### **III. Проверка во втором приближении**

1. Выполнить задание I ещё для 2-х наборов грузов.
2. Для всех возможных пар опытов выполнить расчёт величины  $X_{2ij}$  по формуле (5.10). Заполнить таблицу 5.
3. Выполнить для всех возможных троек опытов расчёт величины  $Y_{2ijk}$  по формуле (5.10a). Внести результаты в таблицу 6.
4. Рассчитать погрешности этих величин. Сравнить полученные результаты.
5. Вычислить средние значения величин  $\langle X_0 \rangle$ ,  $\langle X_1 \rangle$ ,  $\langle X_2 \rangle$  и заполнить таблицу 8.

#### IV. Построение графика. Оценка момента силы трения

Из (5.6) следует

$$m(g - a) = \frac{I}{R^2} a + \frac{M_{\text{тр}}}{R}. \quad (5.15)$$

Следовательно, зависимость величины  $m(g - a)$  от  $a$  должна носить линейный характер. Построив график этой зависимости, можно оценить момент инерции маятника и момент силы трения.

1. Рассчитать для каждого опыта величину  $m_i(g - a_i)$  и внести в таблицу 2.

2. Построить график зависимости  $m(g - a) = f(a)$ .

3. Методом наименьших квадратов построить линейный тренд.

Определить угловой коэффициент прямой  $k = \frac{I}{R^2}$  и свободный член

$b = \frac{M_{\text{тр}}}{R}$ . Результаты внести в таблицу 7.

4. Сравнить  $k$  и  $\langle X_0 \rangle$ ,  $\langle X_1 \rangle$ ,  $\langle X_2 \rangle$ . Сделать выводы.

5. Измерить плечо  $R$  силы  $N$  линейкой или штангенциркулем и рассчитать экспериментальный момент инерции маятника  $I_{\text{эсп}}$ . Результаты внести в таблицу 7.

6. Измерить линейкой расстояние  $l$  от оси маятника до середины груза на стержне. Удобнее измерять расстояние между центрами грузов, а затем поделить на 2. Масса груза  $m_k = (254 \pm 1)$  г. Измерить линейкой длину  $L$  и штангенциркулем диаметр  $d$  стержня. Плотность стали взять из таблиц.

7. Момент инерции маятника теоретически можно оценить как

$$I_{\text{теор}} = 4I_{m_k} + 4I_{\text{стержня}} + I_{\text{шкива}} \approx 4m_k l^2 + 4 \frac{1}{3} m_{\text{стержня}} L^2, \text{ где } m_{\text{стержня}} = \rho \frac{\pi d^2}{4} L.$$

Вычислить данную величину, результаты внести в таблицу 7.

Рассчитать погрешности. Сравнить результаты. Сделать выводы.

8. Оценить массу груза, при которой можно не учитывать силу трения по формуле

$$m_{\text{кр}} \gg \frac{M_{\text{тр}}}{gR} \gg \frac{b}{g}.$$

9. Сделать выводы.

### Контрольные вопросы

1. Запишите теорему вращательного движения АТТ вокруг оси.
2. Сформулируйте и запишите определения: момента силы, момента инерции, углового ускорения.
3. Определите направление момента силы и углового ускорения при раскручивании нити и при закручивании.
4. Получите расчётные формулы.
5. Как рассчитывается момент инерции произвольного твёрдого тела?
6. Рассчитайте момент инерции цилиндрической трубы массы  $m$ , внешнего радиуса  $R_2$  и внутреннего радиуса  $R_1$ .
7. Как изменится момент инерции маятника, если грузы на стержнях передвинуть ближе к центру?

### Полезные ссылки

1. Виртуальная лабораторная работа. [Электронный ресурс]. URL: [http://demo.sde.ru/file1.php/lab/fizika\\_001/lab\\_oberbek.html](http://demo.sde.ru/file1.php/lab/fizika_001/lab_oberbek.html).
2. Маятник Обербека из спичек [Электронный ресурс]. URL: <http://igrushka.kz/vip84/maober.php>. (дата обращения 13.08.2017).

**Лабораторная работа № 5. Лист отчёта**  
**Изучение законов вращательного движения на маятнике Обербека**

Выполнил студент \_\_\_\_\_  
 Факультет \_\_\_\_\_ курс \_\_\_\_\_ группа \_\_\_\_\_  
 Проверил \_\_\_\_\_  
 Показания сняты \_\_\_\_\_  
 Зачтено \_\_\_\_\_

Погрешности измерительных приборов.  $\alpha =$  \_\_\_\_\_ %

Измерительный прибор	$\omega$ – цена деления	$\Delta_{\text{окр}}$ – округления	$\Delta_{\text{пр}}$ – приборная	$\Delta_{\text{суб}}$ – субъективная	Единицы измерения
Секундомер					

Результаты измерений

Таблица 1

1 опыт			2 опыт		3 опыт		4 опыт	
$n_1 =$			$n_2 =$		$n_3 =$		$n_4 =$	
$m_1 =$			$m_2 =$		$m_3 =$		$m_4 =$	
$\Delta m_1 =$			$\Delta m_2 =$		$\Delta m_3 =$		$\Delta m_4 =$	
$\varepsilon_{m_1} =$			$\varepsilon_{m_2} =$		$\varepsilon_{m_3} =$		$\varepsilon_{m_4} =$	
$i$	$t_{1i}, \text{c}$	$\Delta t_{1i}^2, \text{c}^2$	$t_{2i}, \text{c}$	$\Delta t_{2i}^2, \text{c}^2$	$t_{3i}, \text{c}$	$\Delta t_{3i}^2, \text{c}^2$	$t_{4i}, \text{c}$	$\Delta t_{4i}^2, \text{c}^2$
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
$\bar{t}_1 =$			$\bar{t}_2 =$		$\bar{t}_3 =$		$\bar{t}_4 =$	
$\Delta t_1 =$			$\Delta t_2 =$		$\Delta t_3 =$		$\Delta t_4 =$	
$\varepsilon_{t_1} =$			$\varepsilon_{t_2} =$		$\varepsilon_{t_3} =$		$\varepsilon_{t_4} =$	
$a_1 =$			$a_2 =$		$a_3 =$		$a_4 =$	
$\Delta a_1 =$			$\Delta a_2 =$		$\Delta a_3 =$		$\Delta a_4 =$	
$\varepsilon_{a_1} =$			$\varepsilon_{a_2} =$		$\varepsilon_{a_3} =$		$\varepsilon_{a_4} =$	

Таблица 2

Номер опыта $i$	1	2	3	4
$t_i^2, \text{с}^2$				
$m_i, \text{кг}$				
$\Delta m_i, \text{кг}$				
$\varepsilon_{m_i}, \%$				
$a_i, \text{м/с}^2$				
$\Delta a_i, \text{м/с}^2$				
$\varepsilon_{a_i}, \%$				
$m_i(g - a_i), \text{Н}$				

Таблица 3

Номер опыта $i$	1	2	3	4
$X_{0i}, \text{кг}$				
$\Delta X_{0i}, \text{кг}$				
$\varepsilon_{X_{0i}}, \%$				
$X_{1i}, \text{кг}$				
$\Delta X_{1i}, \text{кг}$				
$\varepsilon_{X_{1i}}, \%$				

Таблица 4

Пары значений	1-2	1-3	1-4	2-3	2-4	3-4
$Y_{0ij}$						
$\Delta Y_{0ij}$						
$\varepsilon_{Y_{0ij}}, \%$						
$Y_{1ij}$						
$\Delta Y_{1ij}$						
$\varepsilon_{Y_{1ij}}, \%$						

Таблица 5

Пары значений	1-2	1-3	1-4	2-3	2-4	3-4
$X_{2ij}, \text{кг}$						
$\Delta X_{2ij}, \text{кг}$						
$\varepsilon_{X_{2ij}}, \%$						

Таблица 6

Тройки значений	1-2-3	1-2-4	1-3-4	2-3-4
$Y_{2ijk}$				
$\Delta Y_{2ijk}$				
$\varepsilon_{Y_{2ijk}}, \%$				

Таблица 7

Величина	Значение		Абсолютная погрешность	Единицы измерения	Относительная погрешность, %
$k=$		$\pm$			
$b=$		$\pm$			
$R=$		$\pm$			
$l=$		$\pm$			
$m_k=$	0,254	$\pm$	0,001	кг	0,39
$L=$		$\pm$			
$d=$		$\pm$			
$\rho=$		$\pm$			
$m_{\text{стержня}} =$		$\pm$			
$I_{\text{эксп}} =$		$\pm$			
$I_{\text{теор}} =$		$\pm$			
$m_{\text{кр}}=$		$\pm$			

Формулы для расчёта косвенных измерений

Ответ:

Таблица 8

Величина	Значение		Абсолютная погрешность	Единицы измерения	Относительная погрешность, %
$\langle X_0 \rangle =$		$\pm$			
$\langle X_1 \rangle =$		$\pm$			
$\langle X_2 \rangle =$		$\pm$			

Интервалы сравнений