

**Лабораторная работа № 3**  
**Определение ускорения свободного падения**  
**с помощью установки ФП-26а**

**Цель работы:** научиться определять ускорение свободного падения с помощью установки ФП-26а.

**Оборудование:** установка ФП-26а, металлический шарик.

**Теоретическая часть**

**Инерциальные и неинерциальные системы отсчёта. Силы инерции**

Окружающий нас мир мы узнаём, находясь на Земле, поэтому при решении большинства задач используем систему отсчёта, связанную с телом на поверхности Земли. Однако эта система не является инерциальной, хотя бы потому, что Земля вращается вокруг своей оси, и, следовательно, любая точка на поверхности движется с ускорением.

На широте Москвы ( $\varphi \approx 55,75^\circ$ ) любой предмет, лежащий на поверхности, движется с нормальным ускорением

$$a_n = \omega^2 R = \omega^2 R_3 \cos \varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} R_3 \cos \varphi,$$

$$a_n = \frac{4\pi^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \cdot 0,563}{(86400)^2} \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 1,88 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \quad (3.1)$$

то есть менее  $2,0 \text{ см/с}^2$ .

Если в задаче идёт речь о существенно больших ускорениях, то такую систему с большой степенью достоверности можно считать инерциальной.

Неинерциальными называются системы отсчёта, движущиеся с ускорением относительно инерциальной системы.

Пусть под действием силы  $F$  движется материальная точка массы  $m$  (рис. 3.1). Рассмотрим две системы отсчёта: ИСО и НИСО.

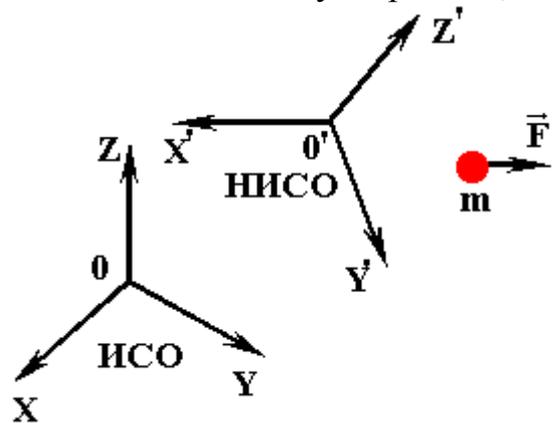


Рис. 3.1

В ИСО второй закон Ньютона запишется как

$$m\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{F}. \quad (3.2)$$

В НИСО с учётом теоремы сложения ускорений этот же закон будет иметь вид

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{F} - m\vec{a}_{\text{пер}} - m\vec{a}_{\text{к}}. \quad (3.3)$$

Произведение массы материальной точки на ускорение НИСО, взятое с обратным знаком, называется силой инерции

$$\vec{F}_{\text{и}} = -m\vec{a}_{\text{пер}}. \quad (3.4)$$

Произведение массы материальной точки на ускорение Кориолиса, взятое с обратным знаком, называется силой Кориолиса<sup>1</sup>.

$$\vec{F}_k = -m\vec{a}_k = -2m[\vec{\omega}_{\text{пер}}, \vec{v}_{\text{отн}}]. \quad (3.5)$$

Обе силы являются фиктивными в том смысле, что нельзя указать тела, со стороны которых действуют эти силы. Кроме того, ясно, что для этих сил не имеет место III закон Ньютона. Однако эти силы вполне реальны в том смысле, что приводят к конкретным физическим последствиям.

Таким образом, в НИСО можно записать выражение, которое по форме напоминает II закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_i + \vec{F}_k. \quad (3.6)$$

Если скорость движения материальной точки в НИСО невелика, то сила Кориолиса мала по сравнению с другими силами.

### НИСО, связанная с вращением Земли

Будем считать Землю однородным шаром и рассмотрим НИСО, связанную с некоторой точкой на поверхности Земли – точкой  $O$ , положение которой определяется географической широтой  $\varphi$  (рис. 3.2).

На материальную точку, находящуюся в точке  $O$ , действуют гравитационная и центробежная силы. По определению сумма этих сил и есть сила тяжести, то есть сила, действующая на материальную точку вблизи поверхности Земли

$$m\vec{a} = \vec{G} = \vec{F}_{\text{гр}} + \vec{F}_{\text{цб}}. \quad (3.7)$$

По теореме косинусов

$$G = \sqrt{F_{\text{гр}}^2 + F_{\text{цб}}^2 - 2F_{\text{цб}}F_{\text{гр}} \cos \varphi}. \quad (3.8)$$

Здесь

$$F_{\text{гр}} = \gamma \frac{M_3 m}{R_3^2}, \quad F_{\text{цб}} = m\omega^2 r = m\omega^2 R_3 \cos \varphi.$$

Подставляя, получаем

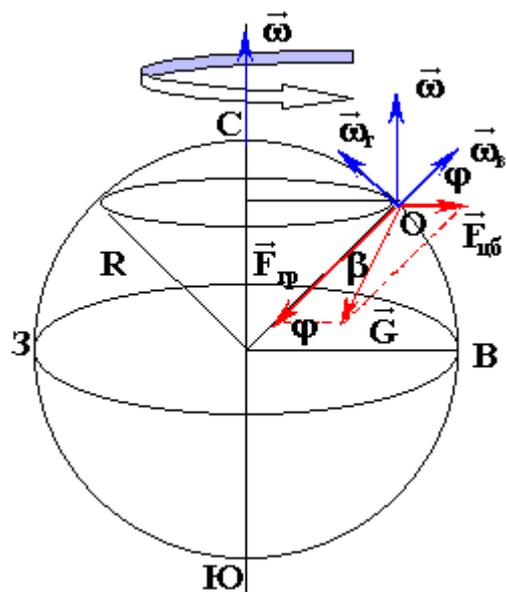


Рис. 3.2

<sup>1</sup> Кориолис Густав Гаспар (Gaspard-Gustave de Coriolis) (1792 – 1843) – французский физик и инженер. Показал (1829 г.), что при сложном движении точки, когда движущаяся система отсчёта перемещается не поступательно, возникает дополнительное ускорение, которое вызывается силой инерции, обусловленной влиянием вращения движущейся системы отсчёта на относительное движение.

$$G = m \sqrt{\gamma^2 \frac{M_3^2}{R_3^4} + \omega^4 R_3^2 \cos^2 \varphi - 2\gamma \frac{M_3}{R_3^2} \omega^2 R_3 \cos^2 \varphi}. \quad (3.9)$$

Если ввести обозначения

$$g_0 = \gamma \frac{M_3}{R_3^2}, \quad \alpha = \frac{\omega^2 R_3^3}{\gamma M_3} = \frac{4\pi^2 R_3^3}{\gamma M_3 T^2},$$

то формула (3.9) принимает вид

$$g(\varphi) = g_0 \sqrt{1 + (\alpha^2 - 2\alpha) \cos^2 \varphi}. \quad (3.10)$$

Зная гравитационную постоянную  $\gamma = (6,67408 \pm 0,00031) \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$  и параметры Земли:  $M_3 = 5,976 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ ,  $R_3 = 6,371 \cdot 10^6 \text{ м}$ ,  $T = 86400 \text{ с}$ , легко рассчитать, что  $g_0 = 9,8245 \text{ м/с}^2$ , а  $\alpha = 0,0034295$ .

Учитывая малость величины  $\alpha$ , и разлагая в ряд  $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ , можно получить  $g(\varphi) \approx g_0(1 - \alpha \cos^2 \varphi)$ . Для широты Москвы  $g = 9,8052 \text{ м/с}^2$ .

По теореме синусов легко определить угол между гравитационной силой и силой тяжести

$$\frac{\sin \beta}{F_{\text{гб}}} = \frac{\sin \varphi}{mg}, \quad (3.11)$$

$$\sin \beta = \frac{F_{\text{гб}}}{mg} \sin \varphi = \frac{\omega^2 R_3 \cos \varphi}{g_0(1 - \alpha \cos^2 \varphi)} \sin \varphi \approx \frac{\omega^2 R_3}{2g_0} \sin 2\varphi \approx 0,0018 \sin 2\varphi, \quad (3.12)$$

то есть его величина очень мала. Очевидно, что угол принимает максимальное значение, если широта местности  $45^\circ$ .

Таким образом, ускорение свободного падения зависит от широты местности.

### Зависимость ускорения свободного падения от высоты

Если материальная точка массой  $m$  находится на высоте  $h$  от поверхности Земли, то гравитационная сила

$$F = \gamma \frac{Mm}{(R+h)^2}. \quad (3.13)$$

Если высота мала по сравнению с радиусом Земли ( $h \ll R$ ), то

$$\frac{1}{(R+h)^2} \approx \frac{1}{R^2} \left[ 1 - 2 \frac{h}{R} \right]. \quad (3.14)$$

Сила тогда равна

$$F \approx \gamma \frac{Mm}{R^2} \left[ 1 - 2 \frac{h}{R} \right], \quad (3.15)$$

а ускорение свободного падения

$$g \approx g_0 \left[ 1 - 2 \frac{h}{R} \right]. \quad (3.16)$$

Таким образом, для достаточно больших высот изменение ускорения свободного падения с высотой незначительно. Например, при падении тел с высоты до 1 км изменение составит менее  $2 \frac{h}{R} \approx 3 \cdot 10^{-4} = 0,03\%$ .

### **Зависимость ускорения от других факторов**

В действительности Земля не имеет шарообразной формы – она сплюснута у полюсов вследствие вращения и плотность её вещества в разных местах различна. Радиус Земли на экваторе  $R_e = 6378,160$  км, а на полюсе  $R_p = 6356,777$  км. Поэтому гравитационная сила максимальна на полюсах и минимальна на экваторе. Однако это различие невелико.

### **Выводы**

В целом минимальное и максимальное значение силы тяжести на поверхности Земли отличается приблизительно на 0,53%.

В настоящее время на основе расчётов Кассиниса и Гельмерта рекомендовано<sup>2</sup> использовать формулу

$$g = 9,780318(1 + 0,0053024 \sin^2 \varphi - 0,0000058 \sin^2 2\varphi) - 3,085 \cdot 10^{-6} h.$$

Направление силы тяжести определяет истинную вертикаль в данном месте Земли.

Ускорение  $g=9,80665$  м/с<sup>2</sup> примерно соответствует 45° широты и принимается за нормальное (стандартное), подобно тому, как за нормальное принято атмосферное давление, равное давлению ртутного столба высотой 760 мм.

В большинстве задач изучается движение тел на Земле и вблизи её поверхности в областях пространства, размеры которых малы по сравнению с радиусом Земли. В этих случаях можно приблизительно считать, что ускорение свободного падения, как по модулю, так и по направлению постоянно.

### **Описание установки**

Экспериментальная установка (рис. 3.3) выполнена в виде вертикальной штанги 1 со шкалой, которая крепится к стене. На штанге установлены два кронштейна: верхний 2 – неподвижный и нижний 3 – подвижный. К верхнему кронштейну крепится электромагнит 4, удерживающий шарик, а к нижнему – уловитель 5 с контактной заслонкой 6.

<sup>2</sup> Подробнее см. примечание в конце описания.

Время полёта шарика отсчитывается по электронному секундомеру 7, пуск которого производится путём включения тумблера на пульте управления 8.

Одновременно с пуском секундомера обеспечивается отключение электромагнита, и начинается свободное падение шарика. Остановка секундомера происходит при падении шарика на заслонку за счёт разрыва электрической цепи. Высота падения шарика измеряется по шкале, укрепленной на вертикальной штанге 1. Напряжение на электромагнит подаётся от источника питания 9 – ВС-24м.

### Экспериментальная часть

*Внимание!*

*Используется напряжение 220 В.*

#### I. Определение ускорения свободного падения

1. Подать электропитание на блок питания 9 и с помощью тумблера, расположенного на передней панели, включить его.
2. Установить подвижный кронштейн 3 на требуемую высоту. (*Высоты желательно брать достаточно большие.*)
3. Заслонку 9 установить в горизонтальном положении.
4. Тумблер 8 на пульте управления перевести в положение «Выкл.».
5. Нажать на красную кнопку «Сброс» на передней панели электронного секундомера 7. При этом индикаторные лампы будут показывать нулевое время.
6. Поднести металлический шарик к электромагниту с помощью подающего устройства. Шарик должен висеть без колебаний.
7. Перевести тумблер 8 на пульте управления в положения «Пуск». При этом одновременно включится секундомер и разомкнётся цепь электромагнита – шарик начнёт падать. В конце падения шарик, коснувшись заслонки, разомкнёт электрическую цепь и секундомер остановится.
8. Повторяя действия начиная с пункта 3, выполнить измерение времени не менее 10 раз. Если измеренное значение отличается от среднего

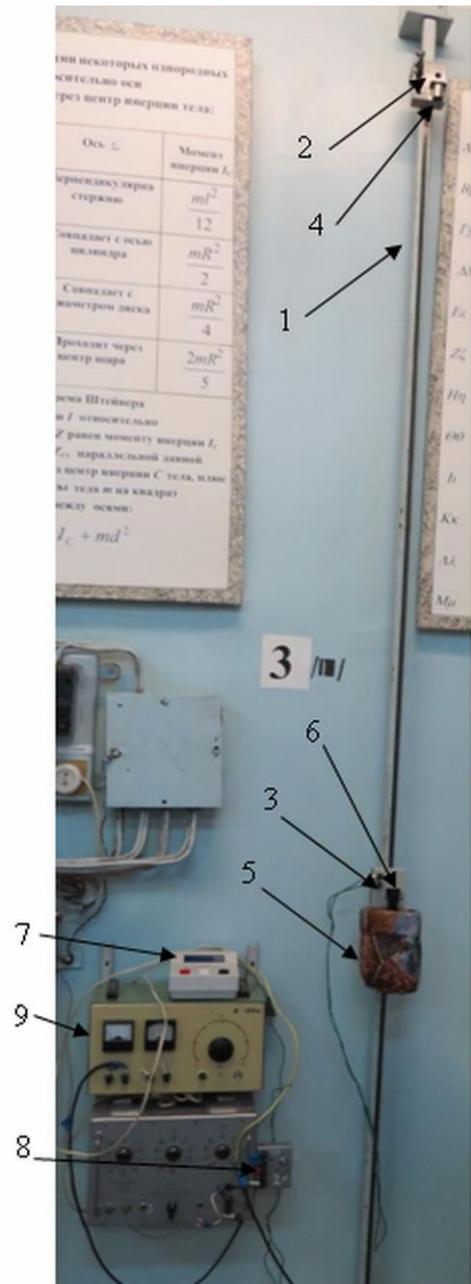


Рис. 3.3

более чем на 0,02 с, то его следует отнести к «промахам», отбросить и продолжить измерения.

9. Высоту и значения времени внести в таблицу 1.
10. Повторить опыт ещё для трёх значений высоты падения, то есть выполнить пункты 2 – 9.
11. Для каждой высоты рассчитать  $\bar{t}$ ,  $(t_i - \bar{t})^2$ , а затем ускорение свободного падения по формуле

$$g = \frac{2h}{\bar{t}^2}.$$

12. Найти абсолютную и относительную погрешности. Результаты внести в таблицу 2. Рассчитать среднее значение ускорения свободного падения и его абсолютную и относительную погрешности. Сравните результат с ускорением свободного падения для Тулы. Сделайте выводы.

## **II. Определение ускорения свободного падения методом наименьших квадратов (график)**

1. Используйте результаты измерений из первого задания.
2. Заполните сводную таблицу 3 для четырёх исследованных высот. По результатам постройте график зависимости  $h=f(t^2)$ .
3. Методом наименьших квадратов постройте линейный тренд, проходящий через начало координат. Определите угловой коэффициент прямой  $k$ .
4. Зная  $k$ , определите ускорение свободного падения. Сравните результат с ускорением свободного падения для Тулы. Сделайте выводы.

### **Контрольные вопросы**

1. Какое движение называется свободным падением?
2. От чего зависит ускорение свободного падения?
3. Сформулируйте закон всемирного тяготения. Запишите его в векторной и скалярной форме.
4. Как изменится модуль центробежной силы инерции, если скорость вращения системы отсчёта увеличить в  $n$  раз?
5. В каком случае можно утверждать, что сила тяжести равна гравитационной силе?
6. Почему в данной лабораторной работе не учитывается сила Архимеда, действующая на шарик в воздухе?
7. Сравните силу тяжести и силу сопротивления, действующую на шарик со стороны воздуха, которую рассчитайте по формуле Стокса  $F_{mp} = 3\pi\eta d v$ , где  $d$  – диаметр шарика,  $\eta = 18,3 \text{ мкПа} \cdot \text{с}$  – динамическая вязкость воздуха.

### Примечание

В настоящее время в мире принята международная гравиметрическая стандартная сеть (МГСС-71) или International Gravity Standardization Net (IGSN-71). Для стран Евросоюза обязательна к применению директива [1], в которой и приведена данная в описании формула.

В Российской Федерации постановлением правительства [2] установлена государственная система координат (ГСК-2011) для гражданского применения и ПЗ90.11 для военно-космического [3].

В документе [3] приведены аналогичные формулы с незначительно отличающимися вычисляемыми коэффициентами – (формулы 4.14 и 4.16).

Также можно посмотреть работу [4], стр.14, 18, и работы [5, 6].

В гравиметрии допустимо использование внесистемной единицы измерения ускорения  $1 \text{ Гал}^3 = 1 \text{ см/с}^2$ . Таким образом, стандартное (нормальное) значение  $g = 980,665 \text{ Гал}$ .

### Литература к примечанию

1. Европейская директива 90/384/ЕЕС WELMEC, май 2009, С. 37. [Электронный ресурс]. URL: [http://www.welmec.org/fileadmin/user\\_files/publications/WELMEC\\_2\\_Issue\\_5.pdf](http://www.welmec.org/fileadmin/user_files/publications/WELMEC_2_Issue_5.pdf). (дата обращения 07.08.2017).
2. Об установлении государственных систем координат, государственной системы высот и государственной гравиметрической системы // Постановление правительства Российской Федерации №1240 от 24.11.2016. [Электронный ресурс]. URL: <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001201611280018?index=0&rangeSize=1>. (дата обращения 24.08.2017).
3. Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90.11). Справочный документ / военно-топографическое управление Генерального штаба вооруженных сил Российской Федерации. Москва, 2014, 52 с. [Электронный ресурс]. URL: <http://structure.mil.ru/files/pz-90.pdf>. (дата обращения 24.08.2017).
4. Бычков С.Г., Долгаль А.С., Симанов А.А. вычисление аномалий силы тяжести при высокоточных гравиметрических съемках // Пермь, УрО РАН, 2015, 142 с. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.geokniga.org/bookfiles/geokniga-vychislenie-anomaliy-sily-tyazhesti-pri-vysokotochnyh-gravimetricheskih-semkah.pdf>. (дата обращения 24.08.2017).
5. Гравиметрия. Учебно-методический комплекс для студентов специальности «Геодезия» // под. ред. Шароглазовой Г.А., Новополоцк, 2006, 195 с. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.psu.by/images/stories/gf/personal/Sharoglazova/gravimetriya.pdf>. (дата обращения 07.08.2017).
6. Н. П. Грушинский. Основы гравиметрии. // М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. 352 с.

---

<sup>3</sup> В честь Галилео Галилея.

**Лабораторная работа № 3. Лист отчёта**  
**Определение ускорения свободного падения**  
**с помощью установки ФП-26а**

Выполнил студент \_\_\_\_\_  
 Факультет \_\_\_\_\_ курс \_\_\_\_\_ группа \_\_\_\_\_  
 Проверил \_\_\_\_\_  
 Показания сняты \_\_\_\_\_  
 Зачтено \_\_\_\_\_

Погрешности измерительных приборов.  $\alpha =$  \_\_\_\_\_ %

Измерительный прибор	$\omega$ – цена деления	$\Delta_{\text{окр}}$ – округления	$\Delta_{\text{пр}}$ – приборная	$\Delta_{\text{суб}}$ – субъективная	Единицы измерения
Шкала для определения высоты $h$					
Электронный секундомер СИЛ-1					

**Задание I**

Результаты измерений

Таблица 1

$h_1 =$		$h_2 =$		$h_3 =$		$h_4 =$		
$\Delta h_1 =$		$\Delta h_2 =$		$\Delta h_3 =$		$\Delta h_4 =$		
$\varepsilon_{h_1} =$		$\varepsilon_{h_2} =$		$\varepsilon_{h_3} =$		$\varepsilon_{h_4} =$		
$i$	$t_{1i}, \text{с}$	$(t_{1i} - \bar{t}_1)^2, \text{с}^2$	$t_{2i}, \text{с}$	$(t_{2i} - \bar{t}_2)^2, \text{с}^2$	$t_{3i}, \text{с}$	$(t_{3i} - \bar{t}_3)^2, \text{с}^2$	$t_{4i}, \text{с}$	$(t_{4i} - \bar{t}_4)^2, \text{с}^2$
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
$\bar{t}_1 =$		$\bar{t}_2 =$		$\bar{t}_3 =$		$\bar{t}_4 =$		
$\Delta \bar{t}_1 =$		$\Delta \bar{t}_2 =$		$\Delta \bar{t}_3 =$		$\Delta \bar{t}_4 =$		
$\varepsilon_{\bar{t}_1} =$		$\varepsilon_{\bar{t}_2} =$		$\varepsilon_{\bar{t}_3} =$		$\varepsilon_{\bar{t}_4} =$		

Формулы для расчёта косвенных измерений

Таблица 2

$\bar{g}_1 =$	$\bar{g}_2 =$	$\bar{g}_3 =$	$\bar{g}_4 =$
$\Delta\bar{g}_1 =$	$\Delta\bar{g}_2 =$	$\Delta\bar{g}_3 =$	$\Delta\bar{g}_4 =$
$\varepsilon_{\bar{g}_1} =$	$\varepsilon_{\bar{g}_2} =$	$\varepsilon_{\bar{g}_3} =$	$\varepsilon_{\bar{g}_4} =$

Ответ:

Величина	Значение		Абсолютная погрешность	Единицы измерения	Относительная погрешность
$\bar{g} =$		$\pm$			
$g_{\text{таб}} =$		$\pm$			

Интервалы сравнений

### Задание II

Таблица 3

$h, \text{мм}$				
$\bar{t}, \text{с}$				
$\bar{t}^2, \text{с}^2$				

график

Ответ:

Величина	Значение		Абсолютная погрешность	Единицы измерения	Относительная погрешность
$\bar{g} =$		$\pm$			
$g_{\text{таб}} =$		$\pm$			

Интервалы сравнений