



**НТЦ-22.04.11  
ФИЗИЧЕСКИЙ И  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
МАЯТНИКИ**

Методические рекомендации  
по выполнению  
лабораторных работ

улица Гришина, 94В,  
212000, г. Могилев,  
Республика Беларусь  
тел/факс (+375 -222) 78-14-14,  
78-37-37

E-mail: [ntp@ntpcentr.com](mailto:ntp@ntpcentr.com)  
[www.ntpcentr.com](http://www.ntpcentr.com)

## ОПИСАНИЕ УЧЕБНОГО ЛАБОРАТОРНОГО СТЕНДА

Учебный лабораторный стенд предназначен для исследования гармонических колебаний математического маятника и определения ускорения свободного падения.



Рисунок 1 – Внешний вид стенда

**Конструктивно стенд состоит из** лабораторной установки и блока управления (электронного секундомера).

**Лабораторная установка представляет собой** основание, опирающееся на ножки регулируемой высоты. На основании закреплена вертикальная стойка, по которой перемещается оптический датчик. На стойке установлен кронштейн, на одно плечо которого опирается опорная призма физического маятника. Призма может свободно перемещаться по штоку после ослабления фиксирующего винта. На штоке на любом требуемом расстоянии от концов могут быть закреплены грузы. На втором плече кронштейна на нитях подвешен шарик. Длину нитей можно менять с помощью натяжного винта. Для отсчета времени колебаний маятника используется электронный секундомер.



**ВНИМАНИЕ!** Не допускается попадание солнечных лучей на фотодатчик.



## ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ, ВЫПОЛНЯЕМЫЕ НА СТЕНДЕ

Лабораторная работа №1	4
▶ Определение периода колебаний физического маятника при изменении расстояния от точки подвеса до центра масс маятника	4
Лабораторная работа №2	12
▶ Исследование зависимостей $T(l)$ и $A(t)$ математического маятника	12

## Лабораторная работа №1

### Определение периода колебаний физического маятника при изменении расстояния от точки подвеса до центра масс маятника



#### Цель работы

- ✓ Определение ускорения силы тяжести по кривой зависимости периода колебаний физического маятника от положения точки подвеса.



#### Оборудование

- Линейка.



#### Теоретическая справка

**Физическим маятником** называют твердое тело, подвешенное на неподвижной горизонтальной оси в поле тяготения, способное совершать колебания вокруг этой оси, которая не проходит через **центр масс**. Точку пересечения оси с вертикальной плоскостью, проходящей через центр масс маятника, называют **точкой подвеса**.

Период малых колебаний (угол отклонения от положения равновесия  $3^\circ - 5^\circ$ ) физического маятника  $T$  не зависит от амплитуды и определяется по формуле:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}, \quad (1.1)$$

где  $I$  — момент инерции маятника относительно точки подвеса;

$m$  — его масса;

$d$  — расстояние от точки подвеса до центра инерции.

Величину  $L = I/md$  называют **приведенной длиной** физического маятника. Она соответствует длине **математического маятника**, период которого равен периоду данного физического.

Таким образом,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1.2)$$

Зная приведенную длину  $L$  и период колебаний  $T$ , можно определить ускорение свободного падения:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \quad (1.3)$$

В данной лабораторной работе используется 2 физических маятника.

**В первой части лабораторной работы** используется маятник, который представляет собой стержень  $C$ , совершающий колебания относительно оси, проходящей через ребро призмы  $P$  (рисунок 1.1). Призма может двигаться вдоль стержня  $C$  и фиксироваться винтом  $B$ . Для отсчета расстояний на стержне нанесены деления. Приз-



ма маятника устанавливается в прорези на горизонтальной плоскости кронштейна К.

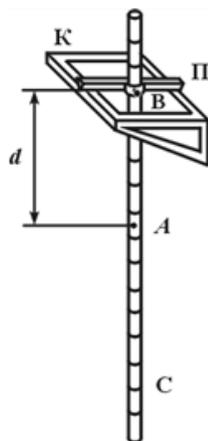


Рисунок 1.1 – Маятник 1

Для нахождения момента инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса, воспользуемся **теоремой Штейнера — Гюйгенса**. Она формулируется следующим образом: момент инерции  $I$  относительно произвольной оси равен сумме момента инерции  $I_0$  относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс (центр инерции) тела, и произведения массы тела  $m$  на квадрат расстояния  $d$  между осями:

$$I = I_0 + md^2 \quad (1.4)$$

С учетом этого соотношения период колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + md^2}{mgd}} \quad (1.5)$$

Как следует из зависимости периода колебаний маятника от расстояния  $T(d)$ , изображенной на рисунке 1.2, наименьшее значение периода наблюдается при некотором расстоянии  $d_0$ .

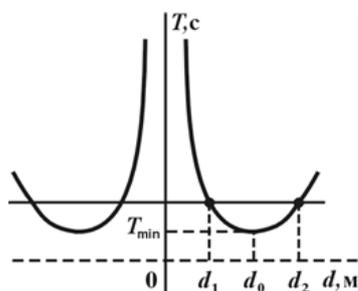


Рисунок 1.2 – Зависимость периода колебаний

Например, для тонкого стержня:

$$d_0 = \frac{L}{\sqrt{12}} \approx 0,29L \quad (1.6)$$

При увеличении, а также при уменьшении  $d$  период возрастает. Таким образом, каждому значению периода  $T$  соответствуют два значения  $d$  ( $d_1 < d_0$  и  $d_2 > d_0$ ) на убывающей и возрастающей ветвях правой кривой.



Левая кривая получается при установке точки подвеса по другую сторону от центра инерции.

Следовательно, период колебаний физического маятника можно представить в виде:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + md_1^2}{mgd_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + md_2^2}{mgd_2}} \quad (1.7)$$

Из равенства (1.7) найдем момент инерции:

$$I_0 = md_1d_2 \quad (1.8)$$

Подставляя значение (1.8) в формулу (1.7), приходим к выводу, что приведенная длина маятника:

$$L = d_1 + d_2 \quad (1.9)$$

Таким образом, на основании экспериментальной зависимости периода колебаний физического маятника от расстояния до центра масс  $T(d)$  можно определить ускорение силы тяжести по формуле:

$$g = \frac{4\pi^2(d_1 + d_2)}{T^2} \quad (1.10)$$

**Во второй части лабораторной работы** используется маятник в виде цилиндрического стержня с двумя неподвижными опорными призмами  $B_1$  и  $B_2$  (рисунок 1.3) и двумя дополнительными массами.

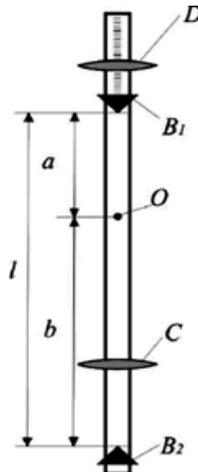


Рисунок 1.3 – Физический маятник 2



Груз С закреплен, а груз D находится на конце стержня (не между призмами) и может перемещаться по нему. Центр масс маятника на схеме обозначен точкой O. Его положение изменяется в зависимости от положения груза D.

Изменяя положение груза D, можно найти такое положение центра масс, при котором  $a+b = l$ . Периоды колебаний на призмах  $B_1$  и  $B_2$  будут одинаковы. Такой маятник называется **оборотным**.

Период колебаний определяется с помощью электронного секундомера и фотоэлектрической рамки. Электронный секундомер фиксирует время установленного ранее количества колебаний  $t$ .

Физический маятник устанавливается на кронштейне основания на клиновой опоре, ближней к концу стержня. Маятник должен свободно проходить через рамку фотодатчика и полностью открывать световой луч при прохождении.



## Практическая часть

### Порядок подготовки к работе:

- Перед началом работы установку необходимо выровнять в горизонтальной плоскости используя круговой уровень и регулировочные ножки и подключить электронный секундомер к фоторамке.



**ВНИМАНИЕ!** Внимание подключение производить при отключенном питании электронного секундомера.

- Включить питание секундомера тумблером на задней панели.

## ⚙️ Определение периода колебаний физического маятника при изменении расстояния от точки подвеса до центра масс маятника



Выполняется с физическим маятником с 1 призмой и без дополнительных грузов.

1. Найдите центр масс стержня физического маятника №1, уравновесив его на снятой призме.
2. Зафиксируйте призму П винтом В на расстоянии 2 — 3 см от конца стержня и поместите маятник на кронштейн.
3. Отрегулируйте положение фоторамки так, чтобы свободный конец стержня свободно проходил через нее.
4. Включите электронный секундомер кнопкой «On».
5. Используя кнопки «+» или «-» на электронном секундомере установите количество колебаний равное 10.
6. Отклонив стержень на небольшой угол (3 — 5°), приведите маятник в колебательное движение.

7. По окончании 10 полных колебаний секундомер автоматически остановит измерение времени.
8. По времени  $t$ , за которое совершаются  $n$  колебаний, найдите период колебаний  $T=t/n$  (возьмите  $n=10$ ). Результаты занесите в таблицу 1.1.
9. Прделайте то же самое для других значений  $d$  (не менее чем 12 — 15 значений, отстоящих на 3 — 5 см). В области минимальных значений периода колебаний (минимальных  $t_n$ ) проведите дополнительные измерения смещая при каждом опыте призму на 1 см. Для полученного минимального значения периода (минимального  $t_n$ ) измерения повторяют 3-5 раз.
10. Постройте график зависимости  $T(d)$ , где  $d$  - расстояние от призмы до центра масс физического маятника.
11. Определяют по этой зависимости значение  $d_0$ , соответствующее минимальному периоду колебаний и сравнивают его с теоретическим. Поскольку положение призмы меняется дискретно с шагом 1 см, то для значения  $d_0$  следует взять погрешность 0.5 см. Находят среднее значение минимального периода колебаний ( $T_{\text{мин}}$ ) и погрешность этой величины.
12. По графику определите приведенные длины маятника  $L = d_1 + d_2$  для нескольких значений периода  $T$ .
13. По формуле (1.10) вычислите ускорение силы тяжести  $g$ .
14. Оцените предельную погрешность нахождения  $g$ .
15. Результаты измерений и вычислений запишите в таблицу 1.1.

### Обработка результатов эксперимента

Таблица 1.1 – Результаты измерений и вычислений

№ п/п	$t, c$	$n$	$T, c$	$d, m$	$L, m$	$\bar{g} \pm \Delta g, m/c^2$

### ⚙️ Определение периода колебаний физического маятника №2



Выполняется с физическим маятником с двумя призмами и двумя дополнительными грузами.

1. Подвесьте маятник на призме В1 (прямое положение маятника) и закрепите груз D в ближайшем к призме В1 положении, соответствующем совмещению риски груза с одной из поперечных рисок на стержне.
2. Включите электронный секундомер кнопкой «On».
3. Используя кнопки «+» или «-» на электронном секундомере установите количество колебаний равное 10.
4. Отклоните маятник от положения равновесия на 3°-5° и отпустите.
5. По окончании 10 полных колебаний секундомер автоматически остановит измерение времени.



6. Зафиксируйте время  $t_{n1}$ , за которое происходят  $n=10$  периодов колебаний. Запишите данные в таблицу 1.2.
7. Нажмите кнопку «Сброс» на электронном секундомере для обнуления результатов измерений.
8. Перевернув маятник и подвесив его на призме В2 (обратное положение маятника), повторите измерения аналогично п. 3-5 для того же положения груза, что и в п.1. Результаты измеренного значения  $t_{n2}$  также запишите в таблицу 1.2.
9. Изменяя положение груза D с шагом 10 мм, повторите измерения по п.3-8. Результаты измерений внесите в таблицу 1.2. Измерения провести не менее, чем для 10 различных положений груза.

### Обработка результатов эксперимента

Таблица 1.2 – Результаты измерений и вычислений

Положение груза $d$ , мм	Прямое положение маятника (на призме В <sub>1</sub> )		Обратное положение маятника (на призме В <sub>2</sub> )	
	$t_{n1}$ , с ( $n=10$ )	$T_1$ , с	$t_{n2}$ , с ( $n=10$ )	$T_2$ , с
0				
10				
20				
30				
40				
...				

10. Выберите из таблицы 1.2 значение  $d=d_n$ , для которого  $t_{n1}$  и  $t_{n2}$  наиболее близки по величине. Вновь закрепите груз D на расстоянии  $d_n$  от призмы В1 и повторите измерения в соответствии с п. 1-8 для прямого и обратного положения маятника по 3 раза каждое. Каждый раз заносите данные в таблицу 1.3.

Таблица 1.3 – Результаты измерений и вычислений

$t_{n1}$ , с ( $n=10$ )	$T_1 \pm \Delta T_1$ , с	$t_{n2}$ , с ( $n=10$ )	$T_2 \pm \Delta T_2$ , с	$a$	$a \pm \Delta a$	$b$	$b \pm \Delta b$

11. Для определения величин  $a$  и  $b$  осторожно уложите стержень на грань снятой с маятника 1 призмы. Передвигая маятник относительно этой грани призмы, добейтесь равновесия, при этом центр масс будет находиться над ребром призмы. При помощи линейки измерьте расстояние  $a$  от центра масс до призмы В1 и определите  $b = l - a$ . Результаты измерений запишите в таблицу 1.3. Измерения повторите 3 раза.
12. Для значения  $d=d_n$  из экспериментальных данных рассчитайте средние значения  $T_1$ ,  $T_2$  и погрешности определения этих величин  $\Delta T_1$ ,  $\Delta T_2$ .
13. Определите средние значения  $a$  и  $b$ , а также их стандартные отклонения.

14. Определите значение ускорения свободного падения используя следующую формулу:

$$g = 4\pi^2 \frac{a^2 - b^2}{aT_1^2 - bT_2^2} \quad (1.11)$$

15. Постройте графики зависимости периодов  $T_1$  и  $T_2$  от координаты груза  $D$ .  
 16. Определите значение  $d=d_1$ , при котором периоды колебаний маятника в прямом и обратном положениях будут одинаковыми. Это можно сделать либо графически, либо вычислить используя линейную интерполяцию.  
 17. Закрепив груз  $D$  в положении  $d=d_1$ , проведите измерения  $t_{n1}$  и  $t_{n2}$  для прямого и обратного положений маятника, повторяя каждый опыт 3 раз. Данные занесите в таблицу 1.4.

Таблица 1.4 – Результаты измерений и вычислений

$t_n, c (n=10)$	$T \pm \Delta T, c$	$g \pm \Delta g, m/c^2$

18. Определите среднее значение периода используя все измерения по формуле:

$$\langle T \rangle = \frac{\sum_{i=1}^3 t_{n1}^{(i)} + \sum_{i=1}^3 t_{n2}^{(i)}}{10} \quad (1.12)$$

19. Определите величину  $g$  по формуле:

$$g = 4\pi^2 \frac{L_{np}}{T^2} \quad (1.13)$$

В данном случае приведенная длина маятника равна расстоянию между призмами.

20. Оцените погрешность проведенных косвенных измерений величины  $g$  по формуле:

$$\Delta g(L, T) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial L} \Delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} \Delta T\right)^2} \quad (1.14)$$

21. Сравните полученный результат с его табличным значением для данной широты и расчетным.

### Обработка результатов эксперимента

#### Порядок завершения работы:

- Выключите электронный секундомер.
- Снимите грузы.



### Контрольные вопросы

1. Что называется физическим маятником? От чего зависит период их колебаний?



2. При каких условиях физический маятник совершает гармонические колебания? Каким уравнением они описываются? Что называется смещением колеблющейся точки, амплитудой, периодом, фазой?
3. Какое движение называется колебательным? Приведите примеры.
4. Какие колебания называются гармоническими? Приведите примеры.
5. Какие колебания называются свободными? В каком случае свободные колебания системы будут незатухающими?
6. В каких положениях колеблющегося маятника максимальна его скорость? Ускорение?
7. Что называется приведенной длиной физического маятника? От каких величин зависит приведенная длина маятника? Относительно какой оси определяется момент инерции маятника?
8. Как изменится период колебаний стержня, если его массу увеличить вдвое? Если точку подвеса удалить от центра инерции?
9. Как изменяется ускорение силы тяжести с увеличением подъема над поверхностью Земли?
10. По каким причинам ускорение силы тяжести зависит от географической широты места?



### Список использованных источников

1. Алешкевич, В. А., Деденко, Л. Г., Караваев, В. А. Механика. - М.: Изд. центр «Академия», 2004.
2. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. В пяти томах. Т. 1. Механика. -М.: ФИЗМАТЛИТ / МФТИ, 2005. §35,36,41
3. Забароўскі, Г. А., Кудзін, Я. С., Якавенка, Ул. А. Метады апрацоўкі вынікаў вымярэнняў. — Мн.: БДПУ, 2001.
4. Стрелков, С. П. Механика. - СПб.: «Лань», 2005. Гл.9, §76,77, Гл.14, §123, 124
5. Акимов, А.И., Баранов, А.Н., Салецкий, А.М. Изучение колебаний физического маятника. М. МГУ, 2007 Введение, 1.1-1.4, 3.1,3.2.

## Лабораторная работа №2

### Исследование зависимостей $T(l)$ и $A(t)$ математического маятника



#### Цель работы

- ✓ Исследование зависимости периода колебаний математического маятника от длины подвеса и расчет ускорения свободного падения по результатам лабораторного эксперимента методом наименьших квадратов. Изучение применения метода наименьших квадратов для вычисления коэффициентов линейной зависимости.



#### Оборудование

- Линейка.
- Штангенциркуль.



#### Теоретическая справка

Как известно, гравитационное поле Земли в любой точке ее поверхности характеризуется ускорением силы тяжести  $g$ . Ускорение силы тяжести можно определить различными способами, в том числе экспериментально с помощью математического маятника.

**Математическим маятником** называют систему, состоящую из массивной материальной точки, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити, способную совершать колебания в поле силы тяжести.

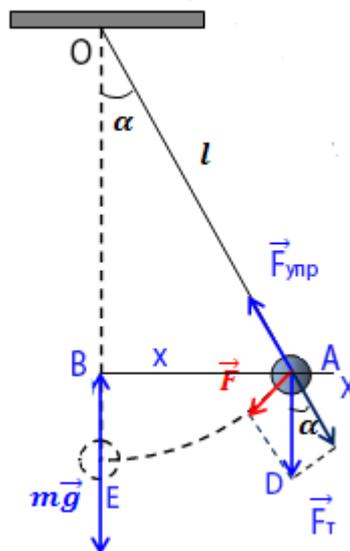


Рисунок 2.1 - Математический маятник

В положении равновесия, когда маятник висит вертикально и неподвижно, сила тяжести  $\vec{F}_T$  уравновешивается силой натяжения нити  $\vec{F}_{упр}$ . При отклонении маятника из положения равновесия на некоторый угол  $\alpha$  появляется касательная составляющая силы тяжести  $\vec{F}_T = -mg \sin \alpha$  (рисунок 2.1). Знак «минус» в этой формуле



означает, что касательная составляющая направлена в сторону, противоположную отклонению маятника. Если обозначить через  $x$  линейное смещение маятника от положения равновесия по дуге окружности радиуса  $l$ , то его угловое смещение будет равно  $\alpha = x/l$ .

Второй закон Ньютона, записанный для проекций векторов ускорения и силы на направление касательной, дает:

$$ma = F = -mg \sin(x/l) \quad (2.1)$$

Это соотношение показывает, что математический маятник представляет собой нелинейную систему, так как сила, стремящаяся вернуть маятник в положение равновесия, пропорциональна не смещению  $x$ , а  $\sin(x/l)$ . Только в случае малых колебаний, когда приближенно  $\sin(x/l)$  можно заменить на  $x/l$  математический маятник является **гармоническим осциллятором**, то есть системой, способной совершать гармонические колебания. Практически такое приближение справедливо для углов менее  $80^\circ$ ; при этом величина  $\sin(x/l)$  отличается от  $x/l$  не более чем на 1%. Колебания маятника при больших амплитудах не являются гармоническими. Для малых колебаний математического маятника можно записать следующее уравнение:

$$ma = \frac{mgx}{l} \quad (2.2)$$

Таким образом, тангенциальное ускорение  $a$  маятника пропорционально его смещению  $x$ , взятому с обратным знаком. Это как раз то условие, при котором система является **гармоническим осциллятором**. А так как рассмотренные колебания маятника происходили под действием только внутренних сил, то это были свободные колебания маятника. Следовательно, свободные колебания математического маятника при малых отклонениях являются **гармоническими**. По общему правилу для всех систем, способных совершать свободные гармонические колебания, модуль коэффициента пропорциональности между ускорением и смещением из положения равновесия равен квадрату циклической частоты:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}; \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2.3)$$

Период колебаний маятника  $T=2\pi\omega$ . Следовательно,  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ .

Это выражение называют **формулой Гюйгенса**. Оно определяет период свободных колебаний математического маятника.

Из формулы следует, что при малых углах отклонения от положения равновесия период колебаний математического маятника:

- не зависит от его массы и амплитуды колебаний;
- пропорционален корню квадратному из длины маятника и обратно пропорционален корню квадратному из ускорения свободного падения.

Это согласуется с экспериментальными законами малых колебаний математического маятника, которые были открыты Г. Галилеем.

Подчеркнем, что эту формулу можно использовать для расчета периода при одновременном выполнении двух условий:

- колебания маятника должны быть малыми;
- точка подвеса маятника должна покоиться или двигаться равномерно прямолинейно относительно инерциальной системы отсчета, в которой он находится.

Если точка подвеса математического маятника движется с ускорением  $\vec{a}_1$ , то при этом изменяется сила натяжения нити, что приводит к изменению и возвращающей силы, а следовательно, частоты и периода колебаний.

Как показывают расчеты, период колебаний маятника в этом случае можно рассчитать по формуле  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$ , где  $g'$  — "эффективное" ускорение маятника в неинерциальной системе отсчета. Оно равно геометрической сумме ускорения свободного падения  $\vec{g}$  и вектора, противоположного вектору  $\vec{a}_1$ , т.е. его можно рассчитать по формуле  $\vec{g}' = \vec{g} + (-\vec{a}_1)$ .

### Графический метод исследования зависимостей

**Графический метод** является наиболее простым и наглядным способом исследования зависимостей.

При построении графиков соблюдают определенные правила. По горизонтальной *оси абсцисс* принято откладывать *аргумент*, а по вертикальной *оси ординат* — *функцию*. Масштабы по обеим осям выбирают независимо друг от друга так, чтобы получить наилучшую наглядность. Для этого анализируют экспериментальные результаты (это легче сделать, если они оформлены в виде таблиц) и устанавливают границы изменения переменных: область определения и множество значений функции.

На графиках обычно приводят только те области изменения величин, которые экспериментально исследованы. Не надо стремиться, чтобы началом отсчета была точка (0,0). На осях указывают обозначения величин и единицы измерения, а также (при необходимости) и множители, (например:  $v$ , м/с;  $U$ ,  $10^4$  В). Масштабы наносят в виде удобных чисел, (например, 4, 6, 8; 5, 10, 15, ...).

В результате многократных измерений зависимых величин  $x$  и  $y$  при каждом конкретном условии опыта получают приближенные значения  $\bar{x}_i$  и  $\bar{y}_i$ , а также оценки погрешностей  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_i$ . В выбранной системе координат наносят точки с координатами  $(x_i, y_i)$ . Погрешности указывают крестиками или прямоугольниками с линейными размерами  $2\Delta x_i$  вдоль оси  $Ox$  и  $2\Delta y_i$  — вдоль  $Oy$ , построенными около этих точек, как около центров (рисунок 2.2).

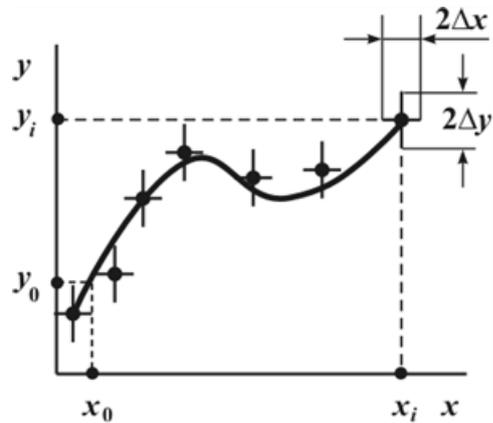


Рисунок 2.2 - Графический метод

Если измерения достаточно точны, крестики (прямоугольники) стягиваются в точки. Проведя через построенные около экспериментальных точек фигуры плавную кривую, получим график исследуемой зависимости  $y = f(x)$ .

Так, построение графика зависимости периода колебаний математического маятника от длины нити  $T(l)$  начнем с анализа результатов измерений, которые для удобства оформим в виде таблицы:

Таблица 2.1 – Результаты измерений и вычислений

№ п/п	$l$ , м	$\Delta l$ , м	$\bar{T}$ , с	$\Delta T$ , с
1	0,05		0,39	0,06
2	0,13		0,63	0,07
3	0,24	0,05	0,95	0,08
4	0,39		1,2	0,1
5	0,63		1,5	0,1

Рассмотрев область определения и множество значений функции (соответственно (0,05 – 0,63) м и (0,39 – 1,5) с), выберем масштабы, нанесем на осях деления и наименования величин. Затем построим точки с координатами  $(l, T)$ , а также погрешности  $(\Delta l, \Delta T)$ . Наконец, проведем кривую  $T(l)$  (рисунок 2.3).

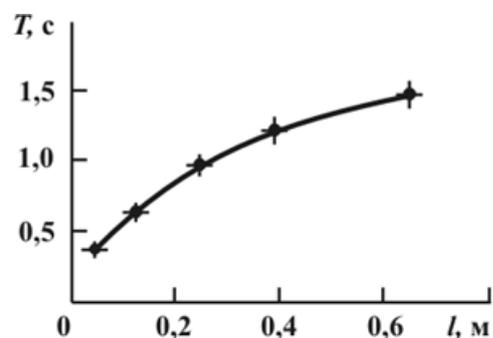


Рисунок 2.3 – Пример графика

Масштаб должен быть выбран так, чтобы график изображал все особенности исследуемой зависимости. Часто бывает удобен нелинейный (функциональный) масштаб. Если значения  $y$  изменяются на несколько порядков, то применяют,

например, так называемый логарифмический масштаб, (т. е. на оси ординат откладывают не сами значения функции, а их логарифмы).

Экспериментальные точки должны быть размещены достаточно густо там, где функциональная зависимость быстро изменяется. При рациональном выборе для надежного построения простой кривой (или прямой) необходимо не менее 5 — 8 точек, а для сложной зависимости — не менее 10 — 15.

С помощью графиков можно обрабатывать экспериментальные данные: интерполировать, дифференцировать, интегрировать. Хотя графические методы менее точны, чем численные (например, метод наименьших квадратов), они просты, наглядны и часто дают неплохие результаты, поэтому широко применяются в учебных лабораториях. Например, по виду графика можно предположить или экспериментально подтвердить вид функциональной зависимости  $y = f(x)$  между измеряемыми величинами  $x$  и  $y$ . Для этого удобно построить график в таких координатах, чтобы предполагаемая функциональная зависимость выражалась прямой линией. Масштабы на осях в этом случае могут быть нелинейными. Если предположение верно, то график должен быть прямой линией. Так, проанализировав экспериментальную зависимость  $T(l)$  по таблице и по графику на рисунок 2.3, можно предположить, что период колебаний математического маятника прямо пропорционален квадратному корню из его длины  $T = a\sqrt{l}$ . Для подтверждения этого на осях следует откладывать  $T$  и  $\sqrt{l}$  или  $T^2$  и  $l$ . Если предположение верно, получим прямую линию (рисунок 2.4).

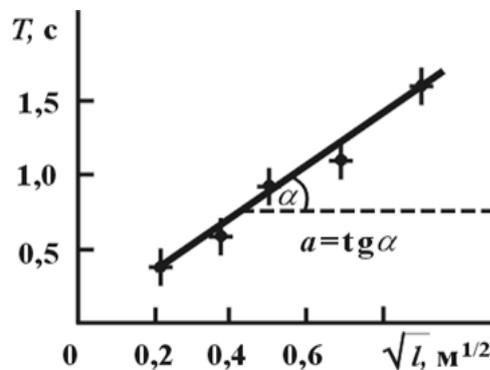


Рисунок 2.4 – График в виде прямой линии

Коэффициент  $a$  может быть найден по наклону этой прямой, а более точно — методом наименьших квадратов. Тем самым проверяется точный вид зависимости

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \text{где } a = 2\pi/\sqrt{g} \quad (2.4)$$

### Метод наименьших квадратов

Рассмотрим простейшую задачу, когда две измеряемые величины  $x$  и  $y$  связаны между собой линейной зависимостью:  $y = ax + b$ . По результатам  $x_i$  и  $y_i$  прямых измерений необходимо найти значения  $a$  и  $b$ . Парам значений  $x_i$  и  $y_i$  соответствуют некоторые точки плоскости (рисунок 2.5). Задача сводится к определению



параметров прямой: углового коэффициента  $a$  и значения ординаты при нулевом значении абсциссы  $b = y(0)$ .

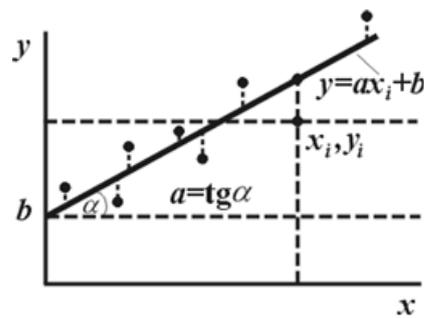


Рисунок 2.5 – График  $y=ax+b$

Так как при любых измерениях допускаются погрешности, то можно найти лишь приближенные значения  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ . Более точные значения будут для прямой  $y = \bar{a}x + \bar{b}$ , которая менее всего отклоняется от экспериментальных точек  $x_i$  и  $y_i$ .

Пусть величина  $x_i$  измеряется достаточно точно (во многих случаях удается организовать эксперимент так, что значение аргумента  $x_i$  задается), случайные погрешности  $\Delta y_i$  распределяются по нормальному закону, а систематические отсутствуют.

Проведем ординаты точек  $x_i$  и  $y_i$  до пересечения с прямой (рисунок 2.5). Согласно методу наименьших квадратов, наилучшей будет прямая, для которой сумма квадратов разностей ординат:

$$Q = \sum (\Delta y_i)^2 = \sum_{i=0}^n (ax_i + b - y_i)^2 \quad (2.5)$$

будет минимальна.

По условию минимума  $\frac{dQ}{da} = 0$  и  $\frac{dQ}{db} = 0$ , откуда:

$$a \sum x_i + nb - \sum y_i = 0 \quad (2.6)$$

$$b \sum x_i + a \sum x_i^2 - \sum x_i y_i = 0 \quad (2.7)$$

Решив эту систему уравнений, получим параметры наилучшей прямой  $y = \bar{a}x + \bar{b}$ :

$$\bar{a} = \frac{A}{B} \quad (2.8)$$

$$\bar{b} = \frac{\sum y_i - \bar{a} \sum x_i}{n} \quad (2.9)$$

Стандартное отклонение рассчитывается по формулам:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{(n-2)B} \left( C - \frac{A^2}{B} \right)}, \quad \sigma_b = \sigma_a \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n}} \quad (2.10)$$

где

$$A = n \sum (x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i, \quad B = n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2, \quad C = n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2 \quad (2.11)$$

Формулы (2.8) — (2.11) приведены к виду, удобному для использования вычислительной техники.

Доверительные погрешности оцениваются по коэффициенту Стьюдента  $t_{\alpha n-2}$  для заданной вероятности  $\alpha$  и  $n-2$  пар измерений:

$$\Delta a = t_{\alpha n-2} \sigma_a, \quad \Delta b = t_{\alpha n-2} \sigma_b \quad (2.12)$$

Рассчитаем, например, коэффициент пропорциональности в зависимости  $T(\sqrt{l})$  (рисунок 2.4) с  $\alpha = 0,8$ . Вычисленные значения  $a = (1,98 \pm 0,13)$  с·м<sup>-1/2</sup> хорошо согласуются с теоретическими:

$$a = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} = 2,006.$$

Значение  $b = (-5,4 \pm 6,8) \cdot 10^{-2} \approx 0$ .

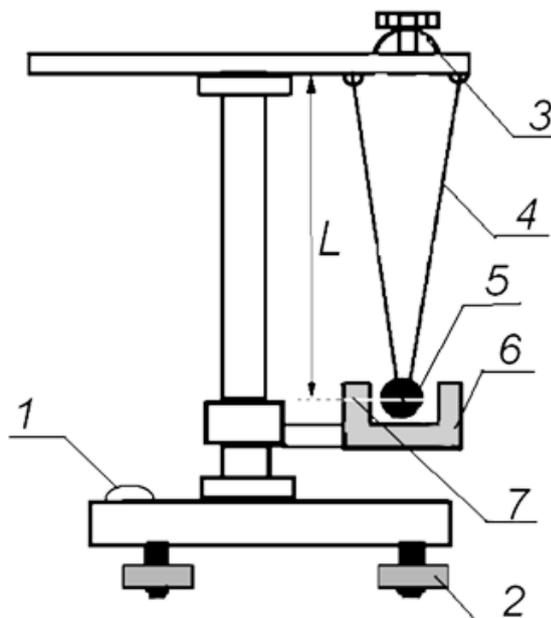
Следует заметить, что существует множество функций  $y = f(x)$ , как угодно хорошо удовлетворяющих экспериментальным точкам  $x_i, y_i$ . Поэтому, прежде всего, на основании физических законов необходимо предположить вид зависимости, а затем проверить ее соответствие результатам эксперимента.



## Практическая часть

### Порядок подготовки к работе:

- Выставьте основание лабораторной установки по уровню 1 в горизонтальной плоскости изменяя высоту ножек 2 (рисунок 2.6).



- 1 – пузырьковый уровень; 2 – регулируемые ножки; 3 – натяжное устройство; 4 - подвес;  
5 - шар; 6 – фотодатчик; 7 – оптическая ось фотодатчика

Рисунок 2.6 – Лабораторная установка

- Подключите лабораторную установку к электронному секундомеру.



**ВНИМАНИЕ!** Подключение и отключение установки к секундомеру производить только при выключенном питании секундомера.

- С помощью натяжного устройства 3 и линейки установите необходимую длину подвеса 4 математического маятника  $L$ .
- Убедитесь, что шар математического маятника 5 свободно проходит в рамку фотодатчика 6 при необходимости изменив положение датчика таким образом, чтобы шар математического маятника оказался в рабочей зоне фотодатчика и его центральная часть будет совпадать по высоте с оптической осью фотодатчика.



**ВНИМАНИЕ!** В результате перекоса шар, не попав в окно, ударит по датчику и может вывести его из строя.

- Нажмите кнопку “Сброс” электронного секундомера (рисунок 2.7) для обнуления показаний.



Рисунок 2.7 – Электронный секундомер

**⚙️ Определение ускорения свободного падения при помощи математического маятника**

1. Установите длину подвеса 75 см.
2. Выполните п. «Подготовка к работе».
3. Нажмите кнопку “Сброс” электронного секундомера для обнуления показаний. Кнопками “+”, “-” электронного секундомера установите на индикаторе “Количество колебаний” равное 10.
4. Приведите маятник в движение, отклонив его приблизительно на 3° – 8° от положения равновесия. После того как электронный секундомер отсчитает время 10 полных колебаний, результаты измерений занесите в таблицу 2.2.
5. Повторите эксперимент 5 раз.
6. Рассчитайте среднее значение периода колебаний  $\langle T \rangle$ , его погрешность  $\Delta \langle T \rangle$ , среднее значение квадрата периода  $\langle T \rangle^2$  и его погрешность  $\Delta \langle T \rangle^2$ .
7. Рассчитайте ускорение свободного падения  $g$  по формуле (2.13) и погрешность  $\Delta g$ :

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \tag{2.13}$$

8. Измените длину подвеса на 85 см.
9. Повторите действия, описанные в п. 2 – 7.
10. Сравните полученные значения между собой, и с табличным значением для вашей местности.

Таблица 2.2 – Результаты измерений и вычислений

№ п/п	l=0.75 м				
	t, с	$\langle T \rangle, с$	$\Delta \langle T \rangle, с$	$\langle T \rangle^2, с^2$	$\Delta \langle T \rangle^2, с^2$
1					
2					
3					
4					



5					
$g_1 =$			$m/c^2$	$\Delta g_1 =$	
			$m/c^2$		
№ п/п	$l=0.85 \text{ м}$				
	$t, \text{ с}$	$\langle T \rangle, \text{ с}$	$\Delta \langle T \rangle, \text{ с}$	$\langle T \rangle^2, \text{ с}^2$	$\Delta \langle T \rangle^2, \text{ с}^2$
1					
2					
3					
4					
5					
$g_2 =$			$m/c^2$	$\Delta g_2 =$	
			$m/c^2$		

### ✿ Исследование зависимости периода колебаний математического маятника от его длины

1. Измерьте с помощью электронного секундомера время  $t$ , за которое совершается  $n$  колебаний маятника при разных длинах нити  $l$  (не менее 10 различных значений длины), результаты измерений занесите в таблицу 2.3.
2. Определите период колебаний:  $T=t/n$ . Результаты расчетов занесите в таблицу 2.3.
3. Погрешность измерения длины математического маятника в результате замены материальной точки массивным телом носит методический характер, поэтому за  $\Delta l$  следует принять радиус шарика. Измерьте при помощи штангенциркуля диаметр шарика, вычислите радиус, результат занесите в таблицу 2.3.
4. Погрешность измерения времени  $\Delta t$  в работе определяется точностью работы пары секундомер – рамка (0,01 с).
5. Оцените предельные погрешности определения периода  $\Delta T$  по формуле  $\Delta T = \Delta t/n$  и  $\Delta T^2$  по формуле  $\Delta T^2 = 2(\Delta t/n)^2$ . Результаты расчетов занесите в таблицу 2.3.

Таблица 2.3 – Результаты измерений и вычислений

№ п/п	$l, \text{ м}$	$\Delta l, \text{ м}$	$t, \text{ с}$	$n$	$T, \text{ с}$	$\Delta T, \text{ с}$	$T^2, \text{ с}^2$	$\Delta T^2, \text{ с}^2$
1	95							
2	90							
3	85							
4	80							
5	75							
6	70							
7	65							
8	60							
9	55							
10	50							

6. Постройте графики зависимостей  $T(l)$ ,  $T^2(l)$ .
7. Определите по графику угловой коэффициент наклона прямой  $T^2(l)$  и сравните его с теоретическим значением  $4\pi^2/g$ .
8. Методом наименьших квадратов найдите параметры «наилучшей» прямой  $T^2(l) = \bar{a}l + \bar{b}$ . Сравните с теоретическими значениями.

**Порядок завершения работы:**

- Выключите электронный секундомер.



**Контрольные вопросы**

1. Что такое математический маятник?
2. Чему равен период колебаний математического маятника?
3. Что называется приведенной длиной маятника?
4. Из закона всемирного тяготения вывести формулу для ускорения силы тяжести вблизи поверхности Земли
5. Как выбираются масштабы? Что обозначается на осях?
6. Как определяются погрешности на графиках?
7. Каким образом производится графическая обработка экспериментальных данных: интерполирование, дифференцирование и интегрирование?
8. В чем заключается метод наименьших квадратов?
9. Дайте определение гармонических колебаний. Напишите уравнение таких колебаний, поясните физический смысл величин, входящих в него.
10. Изобразите график гармонических колебаний, отметив характерные точки.
11. Укажите, в каких точках траектории тела маятника оно имеет максимальную (для данного колебательного процесса) скорость, потенциальную энергию, кинетическую энергию, ускорение, силу натяжения нити.
12. Как изменится период математического маятника, если изменить его длину, массу колеблющегося тела, амплитуду колебаний?
13. Как изменится период математического маятника при его ускоренном движении по вертикали? Чему равен период колебаний такого маятника в случае его свободного падения?
14. Различаются ли понятия “вес тела” и его “сила тяжести”? Какую физическую величину определяют при взвешивании тела?



**Список использованных источников**

1. Савельев, И.В. Курс общей физики. Т.1. \_\_ М.: Наука, 1998. 336 с.
2. Трофимова, Т.И. Курс физики. М.: Высшая школа, 1994. 542 с.
3. Детлаф, А.А., Яворский, Б.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 2000. - 718 с.
4. Линник, Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. — 2-е изд. — М., 1962. (математическая теория).
5. Слободянюк, А.И. Метод наименьших квадратов в физическом эксперименте // Фізика: проблеми. викладання.— 1995. — Вып. 1. — С. 88-99.
6. Тэйлор, Дж. Введение в теорию ошибок. – М: Мир , 1985.